

Analyse à l'ELS

Analyse à l'ELS

1. Introduction
2. Section circulaire
 - 2.1. Notations
 - 2.1.1. Géométrie
 - 2.1.2. Efforts
 - 2.1.3. Contraintes
 - 2.2. Principe de calcul à l'ELS
 - 2.2.1. Hypothèses de calcul
 - 2.2.2. Vérification de la section béton armé à l'ELS
 - 2.2.3. Génération du diagramme d'interaction
 - 2.2.4. Calcul des efforts résistants
 - 2.2.4.1. Effort résistant du béton
 - 2.2.4.2. Effort résistant de l'acier
 - 2.2.4.2.1. Répartition discrète des barres d'acier
 - 2.2.4.2.2. Répartition continue et homogène de la section d'acier
 - 2.2.5. Calcul du taux de mobilisation de la résistance en flexion
 - 2.2.6. Contraintes limites à l'ELS exigées par la norme NF P 94-262
3. Section rectangulaire
 - 3.1. Notations
 - 3.1.1. Géométrie
 - 3.1.2. Efforts
 - 3.1.3. Contraintes
 - 3.2. Principe du calcul à l'ELS
 - 3.2.1. Hypothèses de calcul
 - 3.2.2. Modes de fonctionnement de la section
 - 3.3. Vérification de la section béton armé à l'ELS
 - 3.4. Calcul des sections d'armature nécessaires
 - 3.4.1. Partiellement et entièrement comprimée
 - 3.4.2. Traction simple
4. Ouverture de fissures (w_k)
 - 4.1. Cas particulier des sections circulaires
5. Bibliographie

1. Introduction

Ce document détaille comment l'analyse à l'ELS est menée pour les sections circulaires et pour les sections rectangulaires en béton armé.

2. Section circulaire

Ce chapitre détaille le calcul d'une section circulaire en béton armé soumise à la flexion déviée (ELS).

2.1. Notations

2.1.1. Géométrie

Symbol	Unité	Description
D ou B	m	Diamètre de la section

2.1.2. Efforts

Symbol	Unité	Description
N	MN	Effort normal appliqué au centre de gravité de la section
M	MNm	Moment fléchissant appliqué au centre de gravité de la section

2.1.3. Contraintes

Symbol	Unité	Description
σ_s	MPa	Contrainte dans les aciers
σ_c	MPa	Contrainte de compression dans le béton
f_{ck}	MPa	Contrainte admissible de compression du béton (valeur caractéristique)
f_{yd}	MPa	Contrainte admissible de l'acier (valeur de calcul)
f_{yk}	MPa	Contrainte admissible de l'acier (valeur caractéristique)

2.2. Principe de calcul à l'ELS

2.2.1. Hypothèses de calcul

Le calcul à l'ELS des sections en béton armé tient en compte des hypothèses suivantes :

- **Hypothèse 1** : La résistance à la traction du béton est négligée.
- **Hypothèse 2** : La résistance à la compression du béton est limitée à la contrainte admissible $\overline{\sigma}_c$ à l'ELS.
- **Hypothèse 3** : La résistance à la traction de l'acier est limitée à la contrainte admissible $\overline{\sigma}_s$ à l'ELS.

Les lois de comportement du béton et de l'acier sont fournies dans le chapitre **Matériaux** de ce manuel.

2.2.2. Vérification de la section béton armé à l'ELS

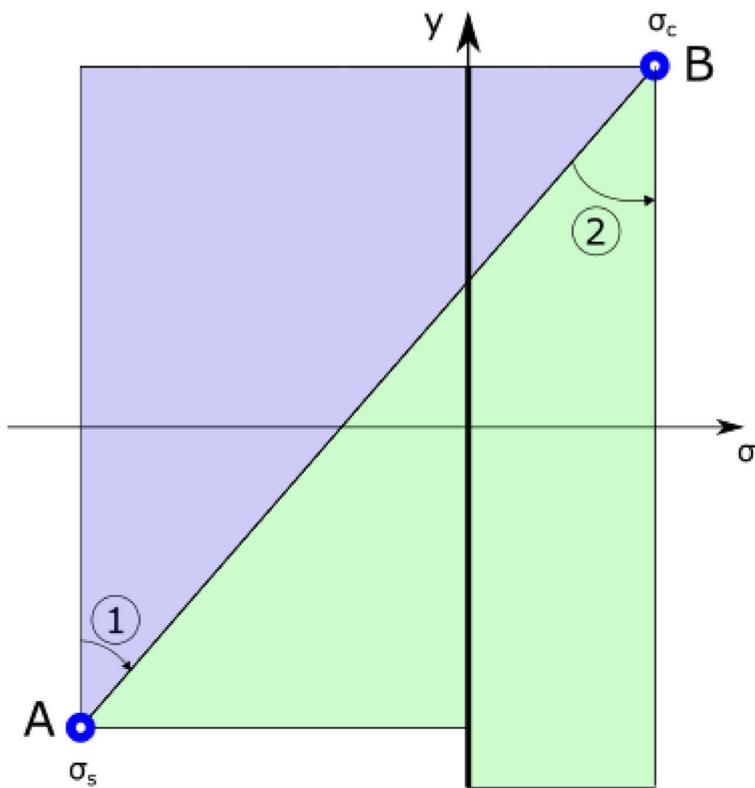
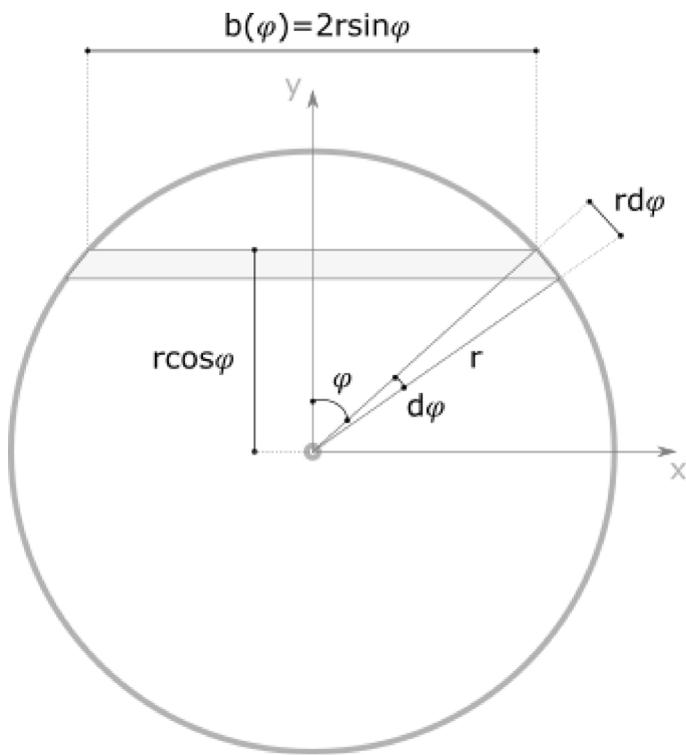
La vérification de la section béton armé à l'ELS se réalise en homogénéisant la section afin de prendre en compte la présence de deux matériaux de rigidités différentes. L'équilibre de la section est basé sur l'équilibre de forces et de moments, ce qui permet de retrouver le diagramme de contraintes de la section.

Dans le cas d'une section entièrement tendue, le béton n'apporte aucune résistance en traction. Les efforts des armatures sont les seuls à équilibrer les efforts extérieurs.

2.2.3. Génération du diagramme d'interaction

Le principe de génération des diagrammes d'interaction se base sur le balayage de tous les modes de flexion possibles de la section. Dans un but d'optimisation du travail de la section, ce balayage est fait en s'appuyant sur les contraintes limites de l'acier (pivot A) et du béton (pivot B) à l'ELS. Le diagramme de contraintes est homogénéisé pour tenir compte des modules de déformation différents de l'acier et du béton.

- **Région 1 (pivot A)** : elle consiste à maintenir la contrainte homogénéisée des aciers inférieurs égale à la contrainte limite de travail à l'ELS tout en faisant varier la contrainte de la fibre supérieure du béton entre la contrainte de travail de l'acier et la contrainte admissible du béton en compression à l'ELS. La résistance en traction du béton est négligée. L'axe neutre se déplace vers le centre au fur et à mesure. La section passe d'un état en traction pure vers entièrement en traction puis partiellement comprimée en partie supérieure de section.
- **Région 2 (pivot B)** : dans cette région la contrainte de la fibre supérieure du béton est égale à la contrainte admissible du béton à l'ELS tout en faisant diminuer la contrainte des aciers inférieurs. L'axe neutre continue à descendre vers la partie inférieure de la section. La section est entièrement comprimée dès que l'axe neutre sors en partie inférieure de la section.



2.2.4. Calcul des efforts résistants

Chaque diagramme de contraintes homogénéisées est décrit par l'équation suivante :

$$\sigma_c(y) = ay + b \quad (1)$$

$$\sigma_c(\varphi) = aR\cos\varphi + b \quad (2)$$

Où a représente la pente et b l'ordonnée à l'origine.

2.2.4.1. Effort résistant du béton

• Effort normal :
Terrasol / Scage

$$N_c = \int_0^x \sigma_c(\varphi) b(\varphi) d y \quad (3)$$

- Moment fléchissant :

$$M_c = \int_0^x \sigma_c(\varphi) b(\varphi) y d y \quad (4)$$

2.2.4.2. Effort résistant de l'acier

2.2.4.2.1. Répartition discrète des barres d'acier

Pour chaque barre de section A_i :

- Contrainte dans la barre "i" à partir du diagramme de contraintes de la section homogénéisée :

$$\sigma_i = n \cdot \sigma_{\text{homogénéisée}} \quad (5)$$

Où n est le coefficient d'équivalence : $n = E_s / E_c$

- Force mobilisée dans la barre "i" :

$$F_i = \sigma_i \cdot A_i \quad (6)$$

Force résultante sur l'ensemble des barres d'acier :

$$N_s = \sum_i F_i \quad (7)$$

2.2.4.2.2. Répartition continue et homogène de la section d'acier

- Diagramme de contrainte rectangulaire (palier plastique) :

$$N_{s,\text{rectangulaire}} = 2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_y \bar{a}_s r_s d \varphi \quad (8)$$

$$M_{s,\text{rectangulaire}} = 2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f_y \bar{a}_s r_s r_s \cos \varphi d \varphi \quad (9)$$

- Diagramme de contrainte triangulaire (palier élastique) :

$$N_{s,\text{triangulaire}} = 2 \int_{\varphi_2}^{\varphi_3} \sigma_{s,i}(\varphi) \bar{a}_s r_s d \varphi \quad (10)$$

$$M_{s,\text{triangulaire}} = 2 \int_{\varphi_2}^{\varphi_3} \sigma_{s,i}(\varphi) \bar{a}_s r_s r_s \cos(\varphi) d \varphi \quad (11)$$

2.2.5. Calcul du taux de mobilisation de la résistance en flexion

Le taux de mobilisation de la résistance en flexion est le rapport entre le moment résistant et celui appliqué pour un même effort normal. Il est déduit du diagramme de déformation calculé pour la section examiné.

2.2.6. Contraintes limites à l'ELS exigées par la norme NF P 94-262

Scage permet de respecter les deux contraintes limites exigées par la norme NF P 94-262 :

- Contrainte moyenne de compression du béton à l'ELS Caractéristique = $0.3k_3 f_{ck}^*$ (figure de gauche)
- Contrainte moyenne de traction à l'ELS Quasi-Permanent = $600w_k$ (pour les éléments entièrement tendus) (figure de droite)

Diagramme d'interaction à l'ELS

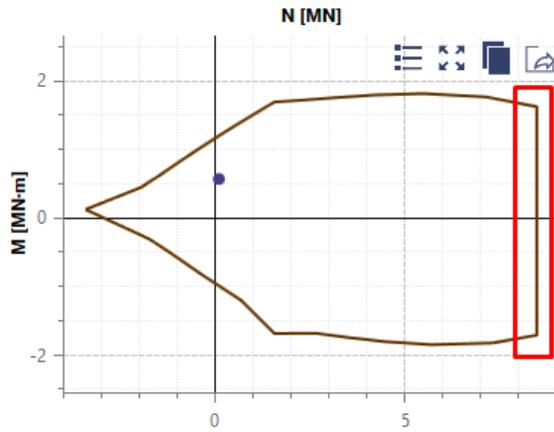
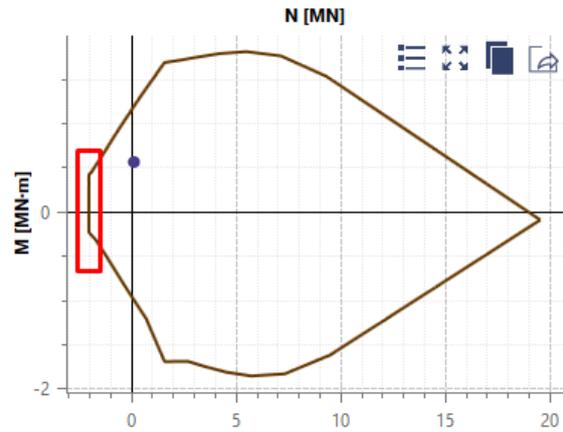


Diagramme d'interaction à l'ELS



•

3. Section rectangulaire

Ce chapitre détaille le calcul d'une section rectangulaire en béton armé soumise à la flexion composée (ELS).

3.1. Notations

3.1.1. Géométrie

Symbol	Unité	Description
b	m	Largeur de la section
h	m	Hauteur totale de la section
A_{s1}	m ²	Section d'acier inférieure
A_{s2}	m ²	Section d'acier supérieure
c_1	m	Distance entre le nu de la section et le centre de gravité des aciers inférieurs
c_2	m	Distance entre le nu de la section et le centre de gravité des aciers supérieurs
d_2	m	Position des armatures A_{s2} par rapport à la fibre inférieure de la section
v'	m	Position de G' par rapport à la fibre inférieure de la section
G	-	Centre de gravité de la section rectangulaire
G'	-	Centre de gravité de la section homogénéisée

3.1.2. Efforts

Symbol	Unité	Description
N_s	MN	Effort normal appliqué à G
M_s	MNm	Moment fléchissant appliqué à G
M	MNm	Moment fléchissant équivalent appliqué sur la fibre inférieure inférieure de la section
N	MN	Effort normal équivalent appliqué sur la fibre inférieure inférieure de la section
M'	MNm	Moment fléchissant équivalent appliqué à G'
N'	MN	Effort normal équivalent appliqué à G'
F_{s1}	MN	Effort repris par l'armatures tendue
F_{s2}	MN	Effort repris par l'armatures comprimée

3.1.3. Contraintes

Symbol	Unité	Description
σ_{s1}	MPa	Contrainte dans les aciers tendus
σ_{s2}	MPa	Contrainte dans les aciers comprimés
σ_c	MPa	Contrainte de compression dans le béton
f_{ck}	MPa	Contrainte admissible de compression du béton (valeur caractéristique)
f_{yd}	MPa	Contrainte admissible de l'acier (valeur de calcul)
f_{yk}	MPa	Contrainte admissible de l'acier (valeur caractéristique)

3.2. Principe du calcul à l'ELS

Le principe de vérification d'une section à l'ELS est basé sur une **analyse en contraintes**.

Cette analyse en contraintes exige un calcul en **section homogénéisée** afin de considérer les différents modules de déformation de l'acier et du béton.

3.2.1. Hypothèses de calcul

Le calcul à l'ELS des sections en béton armé tient en compte des hypothèses suivantes :

- **Hypothèse 1** : La résistance à la traction du béton est négligée.
- **Hypothèse 2** : La résistance à la compression du béton est limitée à la contrainte admissible $\overline{\sigma}_c$ à l'ELS.
- **Hypothèse 3** : La résistance à la traction de l'acier est limitée à la contrainte admissible $\overline{\sigma}_s$ à l'ELS.

Les lois de comportement du béton et de l'acier sont fournies dans le chapitre **Matériaux** de ce manuel.

3.2.2. Modes de fonctionnement de la section

En fonction du diagramme de contraintes généré par le torseur extérieur (M_s, N_s) , la section béton armé peut être en :

- **Compression simple**: effort normal de compression et moment nul.

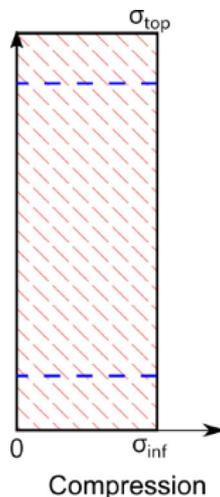


Diagramme de contraintes d'une section en compression simple

- **Partiellement comprimée**: effort normal de compression et moment non nul.

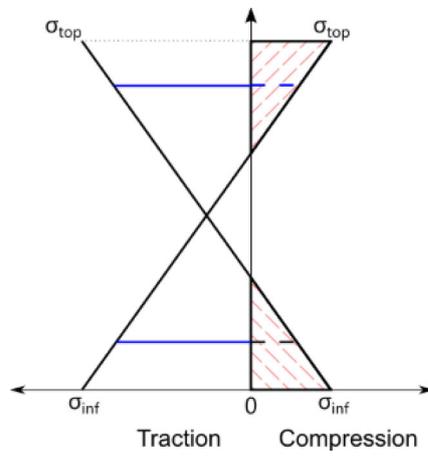


Diagramme de contraintes d'une section partiellement comprimée

- **Entièrement comprimée:** effort normal de compression et moment non nul.

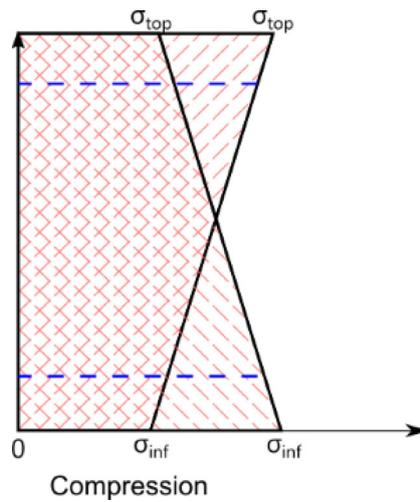


Diagramme de contraintes d'une section entièrement comprimée

- **Entièrement tendue:** effort normal de traction et moment non nul.

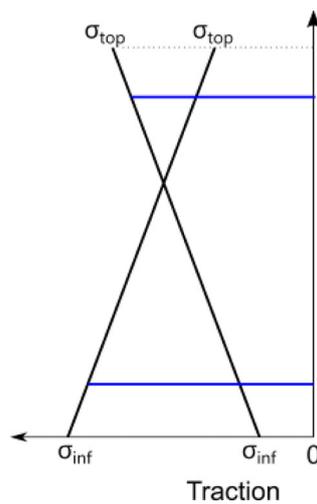


Diagramme de contraintes d'une section entièrement tendue

3.3. Vérification de la section béton armé à l'ELS

La vérification de la section béton armé à l'ELS se réalise en homogénéisant la section afin de prendre en compte la présence de deux matériaux de rigidités différentes. L'équilibre de la section est basé sur l'équilibre de forces et de moments, ce qui permet de retrouver le diagramme de contraintes de la section.

Dans le cas d'une section entièrement tendue, le béton n'apporte aucune résistance en traction. Les efforts des armatures sont les seuls à équilibrer les efforts extérieurs.

3.4. Calcul des sections d'armature nécessaires

3.4.1. Partiellement et entièrement comprimée

Le principe de dimensionnement à l'ELS consiste à chercher la section minimale vérifiant l'équilibre de la section tout en garantissant le non dépassement des contraintes limites de chaque matériau.

3.4.2. Traction simple

En traction simple, la résistance en traction du béton est négligée. Seules les efforts des armatures compensent les efforts appliqués sur la section. La solution la plus économique consiste à garantir le centre de gravité des armatures au point d'application de l'effort normal.

Notons:

- e_{s1} distance entre le point d'application de l'effort normal et les armatures tendues
- e_{s2} distance entre le point d'application de l'effort normal et les armatures comprimées

Les des sections d'acier sont obtenues par équilibre de moments:

$$A_{s2} = \frac{Ne_{s1}}{(e_{s1} + e_{s2})\sigma_{s2}} \quad (12)$$

$$A_{s1} = \frac{Ne_{s2}}{(e_{s1} + e_{s2})\sigma_{s1}} \quad (13)$$

Les contraintes dans les aciers sont considérées égales à la contrainte admissible à l'ELS.

4. Ouverture de fissures (w_k)

$$w_k = s_{r,max} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) \quad (14)$$

Terme	Unité	Description
w_k	mm	Ouverture de fissures
$s_{r,max}$	mm	Espacement maximal des fissures
ε_{sm}	-	Allongement moyen des armatures, sous la combinaison d'actions considérée, tenant compte de la contribution du béton tendu
ε_{cm}	-	Allongement moyen du béton entre les fissures

$$s_{r,max} = k_3c + 0.425k_1k_2 \frac{\phi_{eq}}{\rho_{p,eff}} \quad (15)$$

Terme	Unité	Description
c	mm	Enrobage des armatures longitudinales
k_1	-	Coefficient fonction des propriétés adhérence des barres (0.8 pour les barres HA)
k_2	-	Coefficient tenant compte de la distribution des barres longitudinales $k_2 = 0.5$ en flexion $k_2 = 1$ en traction $k_2 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\varepsilon_1}$ en traction excentrée Avec ε_1 le plus grand et ε_2 le plus faible des allongements relatifs des fibres extrêmes la section considérée, évalués sur la base d'une section fissurée.
k_3	-	Coefficient d'accompagnement de l'enrobage, égale à 3.4
ϕ_{eq}	mm	Diamètre équivalent des barres
$\rho_{p,eff}$	-	Ratio entre la section acier et la section de béton effective ($A_s/A_{c,eff}$)
$A_{c,eff}$	m ²	Aire de béton entourant l'armature tendue sur une hauteur $h_{c,ef} = \min \{2.5 (h - d) ; (h - x)/3 ; h/2\}$

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \max \left\{ 0.6 \frac{\sigma_s}{E_s}; \frac{\sigma_s + k_t \frac{f_{ct,eff}}{\rho_{p,eff}} (1 + \alpha_e \rho_{p,eff})}{E_s} \right\} \quad (16)$$

Terme	Unité	Description
σ_s	MPa	Contrainte à l'ELS des armatures tendues, calculée en supposant la section fissurée
E_s	MPa	Module élastique de l'acier
$f_{ct,eff}$	MPa	Valeur moyenne de la résistance à la traction du béton effective au moment où les fissures sont censées se produire ($f_{ct,eff} = f_{ctm}$)
k_t	-	Coefficient tenant compte de la durée du chargement $k_t = 0.6$ pour un chargement de courte durée $k_t = 0.4$ pour un chargement de longue durée

4.1. Cas particulier des sections circulaires

Le cas des sections circulaires n'est pas traité dans l'Eurocode 2 - Partie 1.1. Le *Guide d'application de l'Eurocode 2* (FD P18-717) fait quelques propositions qui sont résumées ci-dessous dès lors qu'il y a au moins 6 barres longitudinales, ce qui est usuellement le cas dans les situations courantes.

Dans le cadre de la vérification de l'ouverture des fissures, la section circulaire est assimilée à une section rectangulaire équivalente des dimensions :

- Largeur : $b_{w,eq} = 0.6D$

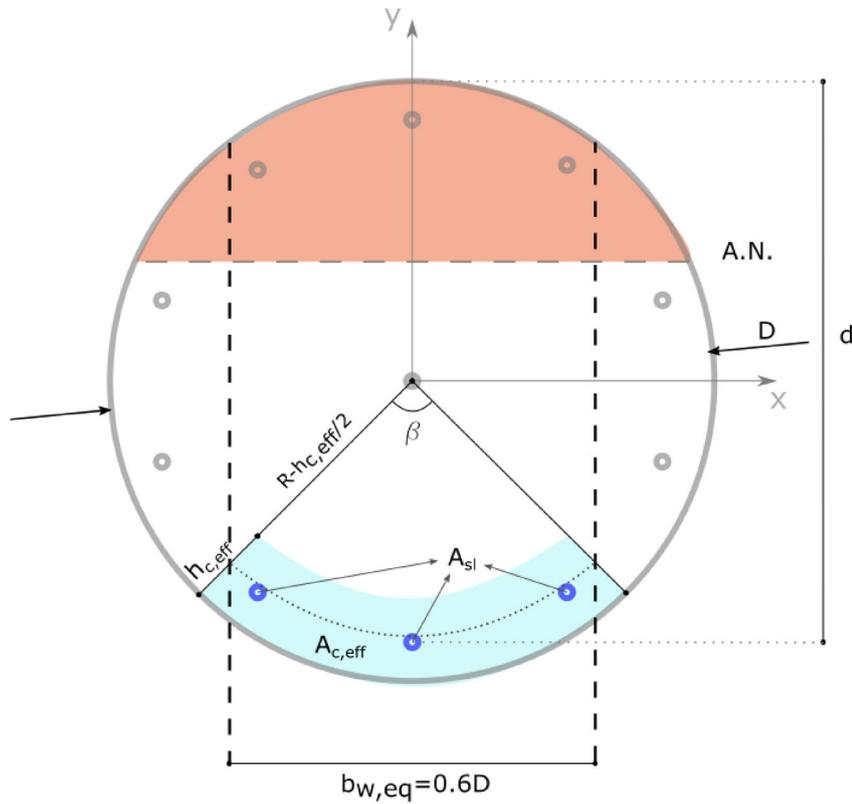
- Bras de levier : $z = 0.9d$

avec D étant le diamètre du pieu et d la hauteur utile de la section.

La hauteur de béton comprimé est calculée avec la section circulaire.

Seules les armatures en traction à l'intérieur de cette section équivalente sont comptabilisées dans le terme A_{sl} .

L'aire de béton entourant les armatures tendues (zone bleu clair) est assimilée à un segment de secteur circulaire d'angle central « beta » et de hauteur de $h_{c,eff} = \min[2.5(D-d) ; (D-x)/3 ; D/2]$.



5. Bibliographie

- Eurocode 2
- Calcul en flexion simple ou composée à l'état limite ultime des sections rectangulaires en béton armé (A. CAPRA, M. HAUTCOEUR)
- Calcul de structures en béton armé (Perchat)

