



# Foxta v4

<b>Manuel utilisateur – Partie C.4 – Notice technique du module PIECOEF+</b>
--

<b>Date</b>	<b>Révision</b>	<b>Etabli par</b>	<b>Commentaires</b>
28/09/2020	Ind A	F. Cuirá	Première émission

# Table des matières

1. Préambule .....	4
2. Aspects théoriques .....	5
2.1. Principe du modèle « p–y » .....	5
2.2. Loi de réaction transversale du terrain.....	6
2.3. Prise en compte d'un déplacement libre du sol $g(z)$ .....	6
2.4. Mise en équation .....	7
2.4.1. Principe .....	7
2.4.2. Modélisation de la réaction du sol .....	8
2.4.3. Résolution.....	9
3. Mise en œuvre pratique.....	11
3.1. Produit d'inertie $EI$ .....	11
3.1.1. Cas d'un pieu de section circulaire en béton.....	11
3.1.2. Cas d'une barrette de section rectangulaire en béton.....	11
3.1.3. Cas d'un pieu de section tubulaire en acier .....	11
3.1.4. Cas d'un pieu (ou micropieu) de section mixte .....	11
3.2. Loi de réaction transversale du sol .....	12
3.2.1. Estimation à partir des propriétés pressiométriques (PMT) .....	12
3.2.2. Estimation à partir des propriétés pénétrométriques (CPT) .....	13
3.2.3. Estimation à partir des propriétés d'élasticité .....	13
3.2.4. Prise en compte des effets de surface.....	14
3.2.5. Prise en compte des effets de groupe.....	14
3.3. Chargement et conditions aux limites .....	14
3.3.1. Conditions de chargement en tête.....	14
3.3.2. Charges et raideurs de rappel ponctuelles le long de la fondation.....	15
3.3.3. Conditions en pied.....	15
3.4. Déplacement libre du sol $g(z)$ .....	16
3.4.1. Déformée libre d'origine statique (poussées latérales) .....	16
3.4.2. Déformée d'origine sismique .....	18
3.5. Exploitation des résultats .....	20
3.5.1. Les déplacements et sollicitations internes.....	20
3.5.2. Matrice de rigidité en tête.....	21
4. Flambement et effets de 2 <sup>nd</sup> ordre.....	23
4.1. Introduction .....	23
4.2. Formulation.....	23

4.3.	Traitement des effets de 2 <sup>nd</sup> ordre .....	25
4.3.1.	Mise en équation.....	25
4.3.2.	Mise en œuvre pratique .....	26
5.	Traitement des déformations d'effort tranchant.....	27
5.1.	Principe .....	27
5.2.	Détermination de la rigidité au cisaillement $GS'$ .....	27
6.	Bibliographie.....	28

# 1. Préambule

Le module PIECOEF+ est destiné à la justification géotechnique et structurale d'une fondation profonde (pieu, micropieu ou barrette) soumise à un chargement transversal, d'origine statique ou sismique. Le calcul est basé sur un modèle de type « p-y » qui assimile la fondation profonde à une poutre travaillant en flexion-cisaillement et simule l'interaction avec le sol environnant par des ressorts élasto-plastiques équivalents.

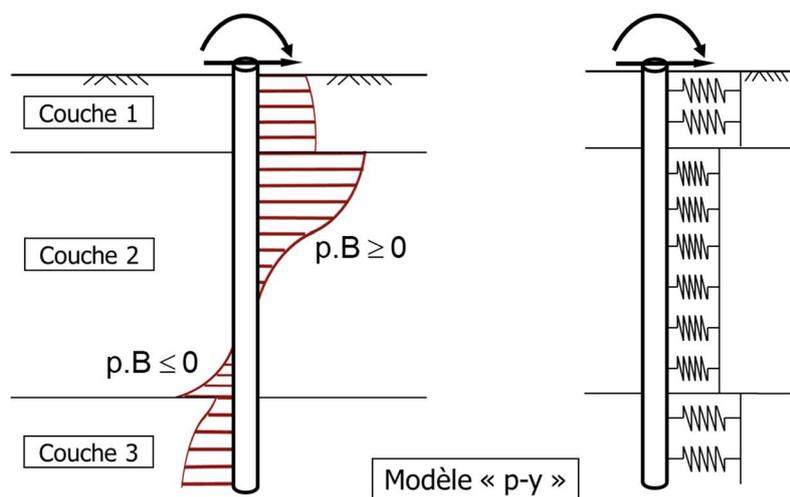


Figure 1 : Principe du modèle Piecoef+

La fondation profonde peut être soumise à un chargement en tête ou en profondeur. Un chargement en profondeur peut être spécifié, soit par des charges extérieures réparties s'appliquant directement sur la fondation, soit par un déplacement « libre » du sol (appliqué sur le support des ressorts) traduisant un mouvement libre transversal d'origine statique (poussées transversales) ou sismique (effet d'interaction cinématique sous séisme).

La résolution du problème posée est menée sous PIECOEF+ à l'aide d'une formulation « matricielle » qui rend aisée :

- la modélisation d'une fondation profonde de section variable dans un terrain multicouche ;
- le traitement de la plastification du sol selon une loi non linéaire à trois paliers (voir §3.2);
- la prise en compte du flambement et d'une manière générale des effets de 2<sup>nd</sup> ordre pour les pieux de faible inertie, par la méthode des valeurs propres (voir §4) ;
- la prise en compte des déformations d'effort tranchant pour les pieux faiblement élancés, par un modèle de Timoshenko (voir §5).

La mise en œuvre du modèle PIECOEF+ permet ainsi d'accéder aux résultats suivants :

- la variation du déplacement transversal et de la rotation le long de la fondation profonde ;
- le diagramme des efforts internes (T, M) à prendre en compte pour la justification structurale de la fondation profonde ;
- détermination de la matrice de rigidité en tête de la fondation nécessaire aux analyses d'interaction sol-structure (voir §3.5.2);
- estimation de l'effort critique de flambement et des amplifications de déformée et de sollicitation par effet de 2<sup>nd</sup> ordre.

## 2. Aspects théoriques

### 2.1. Principe du modèle « p-y »

Le principe des calculs réalisés par PIECOEF+ repose sur un modèle de type « p-y » généralisé qui consiste à assimiler le sol en interaction avec la fondation profonde à une série de ressorts élasto-plastiques placés le long du fût. La fondation profonde est assimilée à une poutre (mince ou épaisse) travaillant en flexion-cisaillement et caractérisée par un produit d'inertie  $EI$  (voir §3.1) et, éventuellement, une rigidité au cisaillement  $GS'$  (voir §5.2).

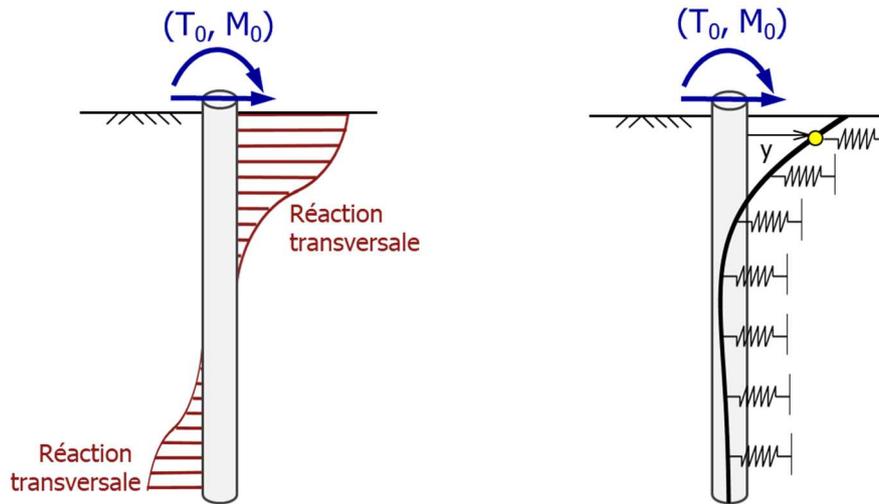


Figure 2 : Principe du modèle « p-y » généralisé (multicouche, non-linéaire)

La réaction linéique, notée  $P$ , des ressorts qui modélisent le terrain représente, par construction, la résultante de la pression horizontale mobilisée autour du fût à une profondeur donnée comme le rappelle la figure suivante. Le comportement de ces ressorts obéit à une loi de mobilisation non-linéaire à deux ou trois paliers selon les principes décrits dans le paragraphe suivant.

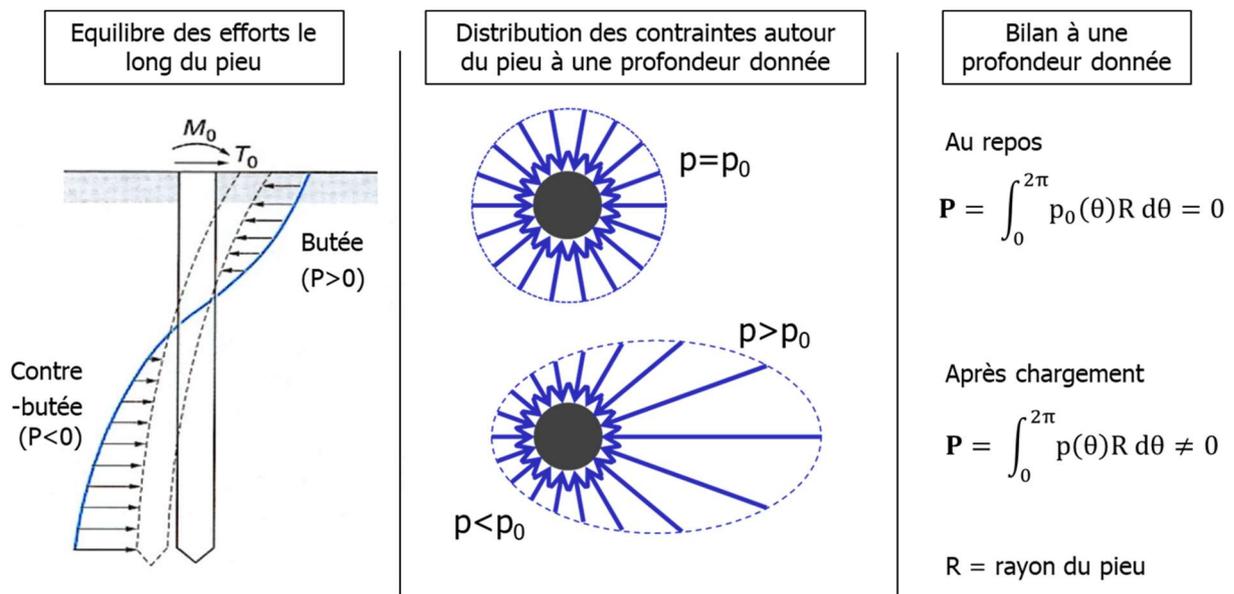


Figure 3 : Modèle « p-y » - Définition conventionnelle de la réaction du sol

## 2.2. Loi de réaction transversale du terrain

Par convention du modèle « p-y », le déplacement transversal de la fondation profonde, noté  $y$ , s'accompagne d'une réaction linéique du terrain, notée  $P$  et exprimée en kN/m. Le rapport  $P/y$  est ce que l'on appelle « module de réaction » du sol, noté  $K_f$  et exprimé en kPa :

$$K_f = P/y$$

Dans la pratique, on utilise également la notion de réaction surfacique du terrain, notée  $p$  et exprimée en kPa, prise par convention égale au rapport entre  $P$  et  $B$  :

$$p = P/B$$

A cette réaction surfacique, est associée une raideur surfacique du terrain, notée «  $k_f$  » et exprimée en kPa/m. Cette raideur surfacique est également appelée « coefficient de réaction ». On a donc, par convention :

$$k_f = p/y = K_f/B$$

Dans Piecoef+, la mobilisation de la réaction transversale du terrain obéit à une loi symétrique à deux ou trois paliers traduisant la variation de la réaction surfacique  $p$  (en kPa) du terrain en fonction du déplacement  $y$  de la fondation profonde. Une telle loi est entièrement décrite à l'aide de deux coefficients de réaction  $k_{f1}$  et  $k_{f2}$  (exprimés en kPa/m) et de deux seuils de plastification  $p_{f1}$  et  $p_{f2}$ . Les produits  $k_{f1}B$  et  $k_{f2}B$  désignent des « modules de réaction » exprimés en kPa.

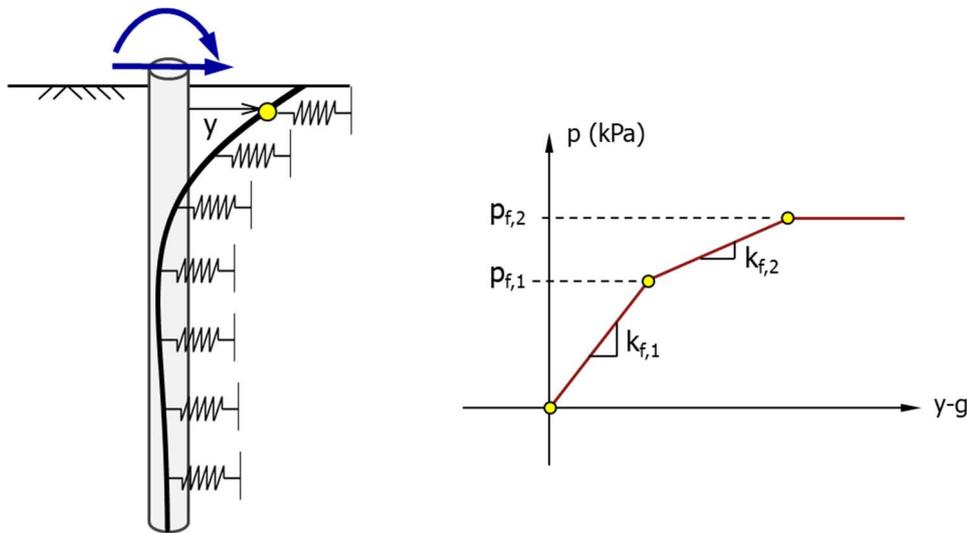


Figure 4 : Loi de mobilisation de la réaction transversale du sol

Les valeurs de  $k_{f1}$  et  $k_{f2}$  peuvent être estimés en pratique par corrélation avec les mesures pressiométriques (§3.2.1), pénétrométriques (§3.2.2) ou à partir des propriétés élastiques du terrain (§3.2.3).

## 2.3. Prise en compte d'un déplacement libre du sol $g(z)$

On considère la situation d'une fondation profonde édifée dans un terrain faisant l'objet d'un mouvement transversal, noté  $g(z)$ , d'origine statique (chargement dissymétrique en surface, excavation ou remblaiement à proximité de la fondation profonde) ou sismique (déformée cinématique liée à la mise en résonance du terrain par le passage des ondes sismiques). Cette situation peut être traitée par une généralisation du modèle « p-y » décrit précédemment, en

écrivait que la réaction transversale du terrain est fonction non pas du déplacement « absolu » de la fondation mais de la différence de la différence  $y(z) - g(z)$  entre le déplacement « d'équilibre »  $y(z)$  et le déplacement libre du sol  $g(z)$ . Dans un tel modèle, la réaction du terrain a un caractère « actif » pour  $y(z) < g(z)$  et passif pour  $y(z) > g(z)$ .

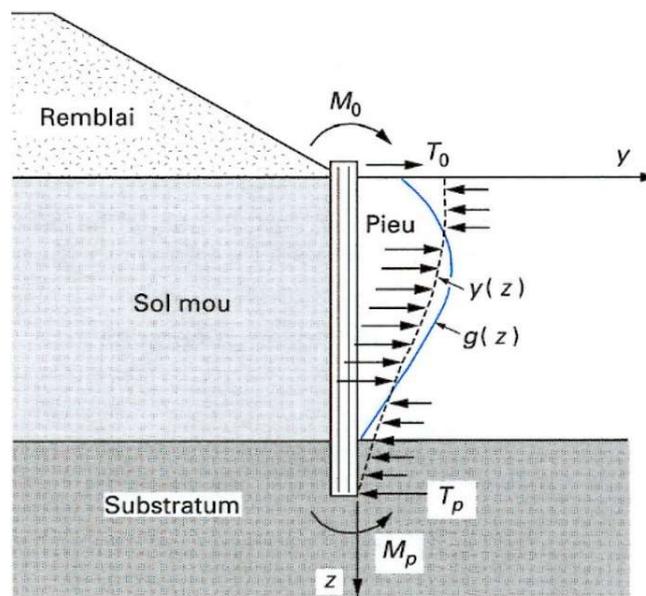


Figure 5 : Exemple d'une fondation profonde dans un sol soumis à un déplacement  $g(z)$

A noter que par convention, le déplacement libre du sol  $g(z)$  est celui que l'on obtient en l'absence de la fondation profonde. Ce déplacement peut être estimé préalablement au calcul PIECOEF+, par des modèles empiriques (§3.4.1), analytiques (par exemple à partir de TASSELDO) ou numériques (par modélisation en éléments finis ou par différences finies en deux ou trois dimensions du terrain déformable).

## 2.4. Mise en équation

### 2.4.1. Principe

Dans un premier temps, on se place dans le cas général d'une fondation profonde suffisamment élancée pour que la contribution des déformations d'effort tranchant soit négligeable (voir §5 pour la prise en compte des déformations d'effort tranchant). Cela permet d'adopter la théorie des poutres minces (modèle de Bernoulli) et d'établir l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[ EI(z) \frac{d^2 y(z)}{dz^2} \right] = B(z) [q(z) - p(z)] \quad (1)$$

Où :

- $y(z)$  déplacement transversal de la fondation profonde au niveau  $z$  ;
- $EI(z)$  produit d'inertie de la fondation profonde ;
- $q(z)$  surcharge surfacique (éventuelle) s'appliquant directement le long du fût ;
- $p(z)$  réaction surfacique du sol ( $= P(z)/B(z)$ ) ;

- $B(z)$  diamètre extérieur équivalent de la fondation profonde.

Cette équation est complétée par :

- la loi de mobilisation de la réaction du sol (§2.4.2) reliant  $p(z)$  à  $y(z)$  ;
- les conditions aux limites en tête (§3.3.1) : efforts ou raideurs imposés ;
- les conditions le long de la fondation (§3.3.2) : efforts ou raideurs imposés ;
- les conditions aux limites en pied (§3.3.3) : efforts ou raideurs imposés.

Dans PIECOEF+, la résolution de ce système d'équations est menée numériquement en discrétisant la fondation profonde en éléments finis de poutre. On utilise pour cela des éléments classiques à 2 nœuds et 2 degrés de liberté par nœud : 1 déplacement transversal  $y$  et 1 rotation  $\omega$ . Le degré de liberté en rotation n'est autre que la première dérivée partielle du déplacement transversal (théorie des poutres minces) :  $\omega = dy/dz$ .

Dans le cadre de cette discrétisation, si l'on note  $p$  le nombre total d'éléments et  $n = 2(p+1)$  le nombre total des degrés de liberté du système, l'équilibre de la fondation profonde peut être écrit sous la forme d'un système matriciel équivalent de taille  $n \times n$  :

$$\mathbf{K}^e \cdot \mathbf{y} = \mathbf{F}^e - \mathbf{R}^s \quad (2)$$

Où :

- $\mathbf{K}^e$  Matrice de rigidité équivalente de la fondation profonde, de taille  $n \times n$ , constituée par assemblage des matrices de rigidité élémentaires ;
- $\mathbf{y}$  Vecteur déplacement équivalent, de taille  $n \times 1$ , constitué par le déplacement et la rotation en chaque nœud ;
- $\mathbf{F}^e$  Vecteur chargement extérieur équivalent, de taille  $n \times 1$ , constitué par intégration des efforts extérieurs s'appliquant à la fondation profonde (en tête et le long du fût autres que la réaction du sol) ;
- $\mathbf{R}^s$  Vecteur chargement relatif à la réaction du sol, de taille  $n \times 1$ , constitué selon les principes du §2.4.2.

## 2.4.2. Modélisation de la réaction du sol

La fondation est en interaction avec un terrain multicouche de comportement élasto-plastique. Chaque couche est assimilée à une distribution de ressorts non-linéaires dont le comportement obéit à une loi générale à trois paliers comme décrit sur la figure suivante. Cette loi permet d'exprimer, en tout point et pour un « palier » donné, la réaction surfacique du sol  $p(z)$  comme une fonction affine du déplacement relatif  $y(z) - g(z)$  :

$$p(z) = a[y(z) - g(z)] + b \quad (3)$$

Le terme « a » est homogène à une raideur surfacique et correspond à la tangente à la courbe de mobilisation en un point donné (part élastique) ; le terme « b » est homogène à une pression et correspond à l'intersection de la tangente avec l'axe des ordonnées (part plastique).

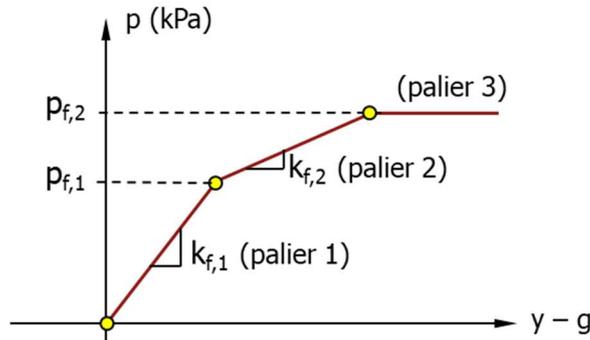


Figure 6 : Courbe de mobilisation à trois paliers – notations et conventions

Avec les notations de la figure ci-dessus, on a :

- Palier 1       $|p(z)| \leq p_{f1}$        $a = k_{f1}$        $b = 0$
- Palier 2       $p_{f1} \leq |p(z)| \leq p_{f2}$        $a = k_{f2}$        $b = \pm p_{f1}(1 - k_{f2}/k_{f1})$
- Palier 3       $|p(z)| = p_{f2}$        $a = 0$        $b = \pm p_{f2}$

Dans le cadre de la discrétisation du modèle éléments finis retenu pour la fondation profonde, le vecteur réaction du sol  $\mathbf{R}^s$  (§2.4.1) s'exprime ainsi selon la formule générale suivante :

$$\mathbf{R}^s = \mathbf{K}^s \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{g}) + \mathbf{R}^0 \quad (4)$$

Où :

- $\mathbf{K}^s$  : matrice de rigidité du sol correspondant à la part élastique de la courbe de mobilisation dans chaque élément (termes « a » de l'équation (3)) ;
- $\mathbf{R}^0$  : vecteur chargement équivalent correspondant à la part plastique de la courbe de mobilisation dans chaque élément (termes « b » de l'équation (3));
- $\mathbf{g}$  : vecteur déplacement équivalent correspondant à la déformée libre du sol.

### 2.4.3. Résolution

La combinaison des équations (2) et (4) conduit à la formulation matricielle traduisant l'équilibre du système « sol + fondation » :

$$[\mathbf{K}^e + \mathbf{K}^s] \cdot \mathbf{y} = [\mathbf{F}^e + \mathbf{K}^s \cdot \mathbf{g} - \mathbf{R}^0] \quad (5)$$

Dans cette formulation, les termes  $[\mathbf{K}^e + \mathbf{K}^s]$  et  $[\mathbf{F}^e + \mathbf{K}^s \cdot \mathbf{g} - \mathbf{R}^0]$  représentent respectivement la matrice de rigidité et le vecteur chargement du système. La résolution de celui-ci permet de calculer le vecteur déplacement  $\mathbf{y}$ .

La plastification du sol est traitée par une procédure itérative qui permet d'actualiser  $\mathbf{K}^s$  et  $\mathbf{R}^0$  (et par conséquent  $\mathbf{y}$ ) en ajustant les termes « a » et « b » de l'équation (3) dans chaque élément. La convergence de cette procédure itérative est assurée moyennant :

- Une tolérance relative prise par défaut égale à 0,01% ;
- Une incrémentation (20 par défaut) du chargement extérieur appliqué sur la fondation.

La résolution du système final permet d'obtenir les déplacements  $y(z)$ , rotations  $\omega(z)$ , et réactions  $P(z)$  (ou  $p(z) = P(z)/B(z)$ ) en tout point de la fondation profonde. Connaissant la réaction du sol  $p(z)$ , les moments fléchissants  $M(z)$  et efforts tranchants  $T(z)$  sont calculés ensuite par intégration selon les relations suivantes :

$$M(z) = \int_0^z T(x)dx + M(0) \quad \text{et} \quad T(z) = \int_0^z B(x)[q(x) - p(x)]dx + T(0)$$

## 3. Mise en œuvre pratique

### 3.1. Produit d'inertie EI

Toujours dans le cadre de la théorie des poutres minces, la mise en œuvre du modèle nécessite de définir le produit d'inertie EI de la fondation profonde. PIECOEF+ permet de spécifier la valeur de EI par couche.

#### 3.1.1. Cas d'un pieu de section circulaire en béton

Pour un pieu en béton de section circulaire pleine de diamètre B :

$$EI = E_b \frac{\pi B^4}{64}$$

Où  $E_b$  désigne le module d'Young du béton que l'on prend égal à :

- $E_b = 10\,000$  MPa pour un chargement de longue durée ;
- $E_b = 30\,000$  MPa pour un chargement instantané.

#### 3.1.2. Cas d'une barrette de section rectangulaire en béton

Pour une barrette de section rectangulaire pleine de longueur L et de largeur B :

$$EI_L = E_b \frac{BL^3}{12} \quad EI_B = E_b \frac{LB^3}{12}$$

Où  $EI_L$  (resp.  $EI_B$ ) désigne le produit d'inertie pour un chargement dans la direction de L (resp. B).

Le module d'Young du béton  $E_b$  est estimé selon les indications du §3.1.1.

#### 3.1.3. Cas d'un pieu de section tubulaire en acier

Pour un pieu de section tubulaire en acier, de diamètre extérieur  $B_{ext}$  et de diamètre intérieur  $B_{int}$  :

$$EI = E_a \frac{\pi(B_{ext}^4 - B_{int}^4)}{64}$$

Où  $E_a$  désigne le module d'Young de l'acier pris égal à 210 000 MPa.

#### 3.1.4. Cas d'un pieu (ou micropieu) de section mixte

Pour un pieu ou micropieu de section mixte (profilé tubulaire, en I ou en H mis en œuvre dans un forage en béton ou en coulis de ciment), le produit d'inertie résultant est calculé à l'aide de la relation :

$$EI = E_a I_a + E_b (I_b - I_a) \quad \text{avec} \quad I_b = \frac{\pi B^4}{64}$$

Où  $E_a$  est le module d'Young de l'acier (= 210 000 MPa),  $I_a$  est l'inertie en flexion du profilé (dans la direction du chargement), B est le diamètre extérieur du forage,  $E_b$  le module d'Young du béton ou du coulis de ciment (que l'on peut négliger en première approximation).

### 3.2. Loi de réaction transversale du sol

On considère les notations de la figure suivante.

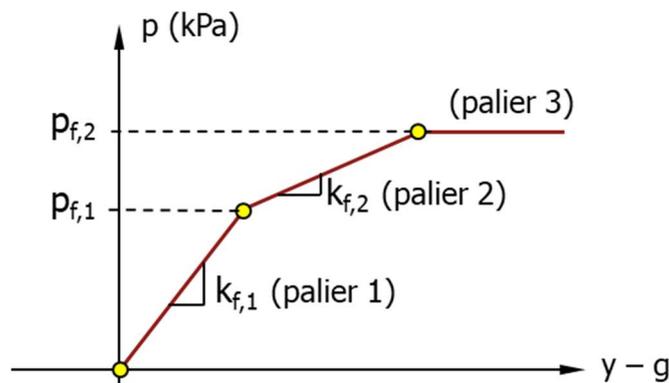


Figure 7 : Courbe de mobilisation à trois paliers – notations et conventions

#### 3.2.1. Estimation à partir des propriétés pressiométriques (PMT)

Les coefficients de réaction  $k_{f,i}$  peuvent être estimés à partir du modèle de Ménard selon la relation (NF P 94 262):

$$k_{f,i}B = \mu_i \frac{18\rho E_M}{4(2,65\rho)^\alpha + 3\alpha\rho} \quad \text{avec } \rho = \max\left(\frac{B}{B_0}; 1\right)$$

Où :

- $E_M$  module pressiométrique de Ménard ;
- $\alpha$  coefficient rhéologique variant de 0,33 pour un sol sableux à 0,67 pour sol argileux;
- $\mu_i$  coefficient multiplicateur dépendant du type de sollicitation ;
- $B_0$  dimension de référence prise égale à 0,6 m ;

Les valeurs de  $\mu_i$  ainsi que celles des paliers  $p_{f1}$  et  $p_{f2}$  sont données dans le Tableau 1.

Type de sollicitation	$\mu_1$	$\mu_2$	$p_{f1}$	$p_{f2}$
Sollicitations permanentes en tête dominantes	1	0	$p_{\text{fluage}}$	$p_{\text{fluage}}$
Sollicitations de courte durée en tête dominantes	2	0	$p_{\text{fluage}}$	$p_{\text{fluage}}$
Poussées transversales du sol dominantes (statiques)	1	$\mu_1/2$	$p_{\text{fluage}}$	$p_{\text{limite}}$
Sollicitations accidentelles en tête dominantes	2	$\mu_1/2$	$p_{\text{fluage}}$	$p_{\text{limite}}$
Sollicitations sismiques dominantes	2 à 6	$\mu_1/2$	$p_{\text{fluage}}$	$p_{\text{limite}}$

Tableau 1 : Valeurs des coefficients  $\mu_i$  et des paliers  $p_{fi}$  en fonction du type de sollicitation

Où  $p_{\text{fluage}}$  et  $p_{\text{limite}}$  sont respectivement la pression de fluage nette ( $p_f^*$ ) et la pression limite nette ( $p_l^*$ ) mesurées à l'essai pressiométrique. Il est important de noter que dans les situations où les poussées transversales du sol dominant, la réaction du sol est réputée être de caractère « actif » (le sol « pousse » la fondation). La sécurité est ainsi mieux assurée avec une loi de réaction allant jusqu'à la pression limite (Tableau 1).

### 3.2.2. Estimation à partir des propriétés pénétrométriques (CPT)

Les coefficients de réaction frontaux  $k_{f,i}$  peuvent également être estimés à partir de la résistance de cône obtenue par un essai CPT selon la relation (NF P 94 262) :

$$k_{f,i}B = \mu_i\beta q_c$$

Où :

- $q_c$  résistance de cône pénétrométrique ;
- $\mu_i$  coefficient multiplicateur dépendant du type de sollicitation (Tableau 1);
- $\beta$  facteur de corrélation fonction du type de terrain (Tableau 2) ;
- $B_0$  dimension de référence prise égale à 0,6 m.

Les valeurs de  $\mu_i$  ainsi que celles des paliers plastiques  $p_{f1}$  et  $p_{f2}$  sont données dans le Tableau 1. Dans le cas du pénétromètre statique, les paliers plastiques sont estimés par corrélation avec la résistance de cône selon la relation (NF P 94 262) :

$$p_{\text{fluage}} = \frac{q_c}{\beta_1} \quad \text{et} \quad p_{\text{limite}} = \frac{q_c}{\beta_2}$$

Où  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont des facteurs de corrélation donnés dans le tableau suivant (NF P 94 262):

	Terrain sableux	Terrain intermédiaire	Terrain argileux	Craie et Marnes
$\beta$	2	4	6	2
$\beta_1$	13,0	10,0	5,0	13,0
$\beta_2$	8,0	6,0	3.5	8,0

Tableau 2 : Valeurs des facteurs de corrélation  $\beta$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$

### 3.2.3. Estimation à partir des propriétés d'élasticité

Le coefficient de réaction du sol pour un pieu circulaire flexible peut également être caractérisé à partir du module de cisaillement du terrain  $G$  à l'aide de la relation suivante (Frank, 1982) :

$$k_f \approx \frac{2,4(1 + \nu)G}{B}$$

Avec  $\nu$  le coefficient de Poisson du sol.

Les paliers plastiques  $p_{\text{limite}}$  et  $p_{\text{fluage}}$  peuvent être reliés à la résistance au cisaillement non drainée  $c_u$  à l'aide de relation :

$$p_{\text{fluage}} \approx 4c_u \quad \text{et} \quad p_{\text{limite}} \approx 6c_u$$

### 3.2.4. Prise en compte des effets de surface

Quelque soit la méthode utilisée pour l'estimation du coefficient de réaction du sol, il convient de prendre en compte les effets de dégradation à proximité du niveau du TN initial. La norme NF P 94 262 propose d'appliquer cette dégradation de façon homothétique sur la courbe de mobilisation de la réaction du sol (sur les raideurs et paliers plastiques) selon les principes suivants :

- Coefficient de dégradation variant linéaire de 0,5 en surface à 1,0 à la base de la zone de dégradation ;
- La zone de dégradation s'étend sur une profondeur de 2 x B pour un terrain cohérent à 4 x B pour un terrain frottant, où B est le diamètre extérieur de la fondation profonde.

### 3.2.5. Prise en compte des effets de groupe

La norme NF P 94-262 admet que les lois de réaction d'une fondation isolée s'appliquent pour les groupes de fondations dont l'entraxe « e » est supérieur à 3 B (B = diamètre de la fondation profonde). Si cette condition n'est pas remplie, des règles de réduction sont appliquées selon les indications de la figure suivante.

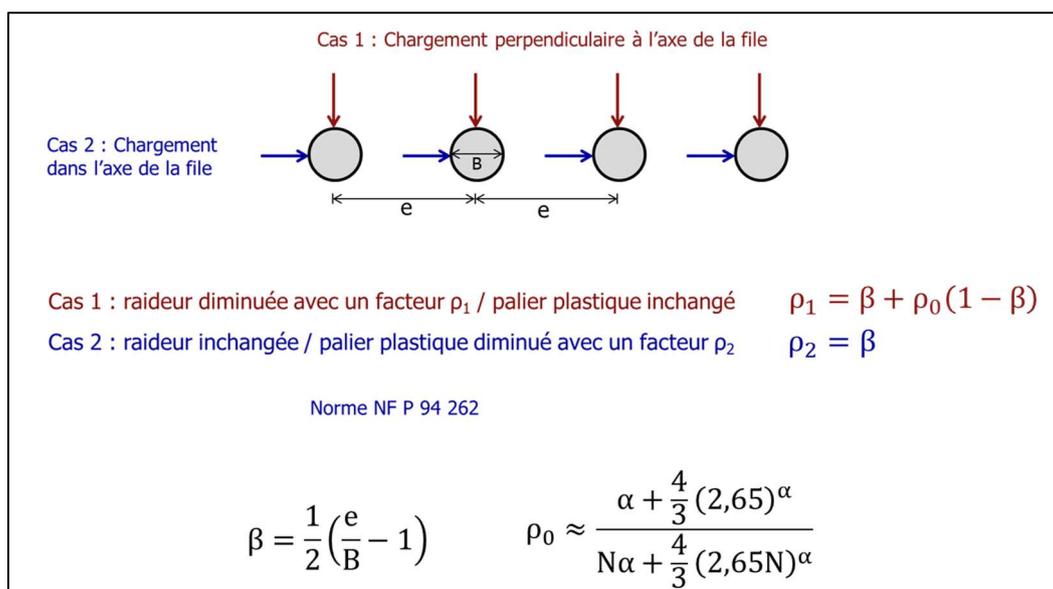


Figure 8 : Dégradation des lois de réaction par effet de groupe

## 3.3. Chargement et conditions aux limites

### 3.3.1. Conditions de chargement en tête

Les conditions de chargement en tête de la fondation profonde peuvent être spécifiées selon les considérations pratiques suivantes :

- La modélisation de référence est celle d'un couple  $(T_0, M_0)$  transmis par la structure portée (résultat du modèle « Structure »), sachant que PIECOEF+ permet aisément le traitement d'un grand nombre de cas de charge en tête ;

- Le moment en tête  $M_0$  peut être pris égal à 0 pour les situations où la condition de liaison avec la structure portée est assimilée à une articulation (il s'agit souvent d'un choix de conception purement « conventionnel ») ;
- Il est important de noter qu'une condition « d'encastrement » de la fondation profonde dans la semelle de liaison n'est pas nécessairement équivalente à celle d'une rotation bloquée en tête de la fondation profonde ;
- PIECOEF+ permet également de spécifier les conditions de chargement en tête sous la forme d'un déplacement et/ou une rotation imposée.

### 3.3.2. Charges et raideurs de rappel ponctuelles le long de la fondation

PIECOEF+ permet la définition de raideurs ponctuelles « additionnelles » en tête ou le long du fût traduisant des conditions de liaison élastiques avec un autre élément structural :

- Raideur ponctuelle en translation transversale notée  $K$  dans PIECOEF+ (en kN/m) ;
- Raideur ponctuelle en rotation notée  $C$  dans PIECOEF+ (en kNm/rad).

A noter qu'il est également possible d'introduire un chargement ponctuel extérieur le long du fût. Le choix d'une raideur numériquement élevée permet de simuler une condition d'appui « parfaite » de type articulation ( $K$  élevée) ou encastrement ( $C$  élevée).

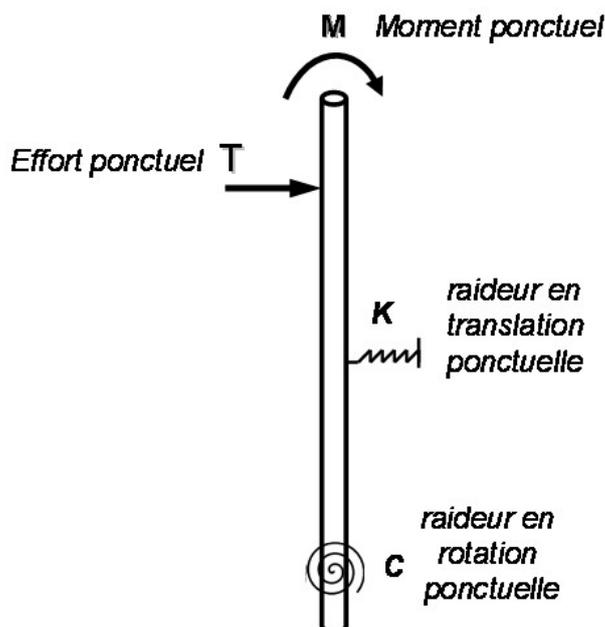


Figure 9 : Conditions de chargement ou de raideurs ponctuelles long du fût

### 3.3.3. Conditions en pied

Dans le cas général, les fondations profondes de type « pieu » et « micropieu » présentent un comportement transversal suffisamment souple vis-à-vis du terrain pour que la contribution de la pointe dans l'équilibre transversal soit négligée. Ceci-ci est effectivement le cas pour des pieux circulaires chargés en tête de longueur supérieure ou égale à 8 fois le diamètre (ce qui correspond à la majorité des situations courantes).

Pour les autres situations (fondations de type barrettes, pieux courts, pieux soumis à des poussées latérales en profondeur etc.), il convient d'examiner les effets de « blocage élastique » en pointe.

Ces effets peuvent être simulés par des raideurs ponctuelles, en translation ( $K_{HB}$ ) et rotation ( $K_{MB}$ ), spécifiées à la base de la fondation selon les modalités pratiques de la figure suivante.

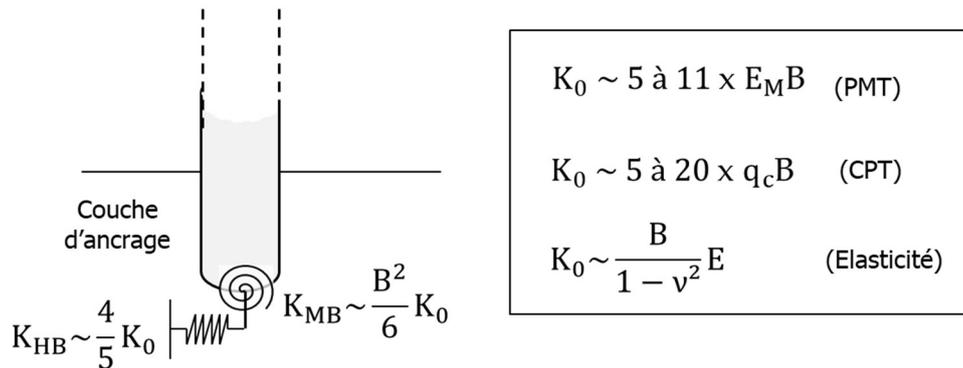


Figure 10 : Traitement des effets de blocage élastiques en pointe

La validité des expressions ci-dessus suppose implicitement que la charge verticale en pointe est suffisamment élevée pour qu’il n’y ait ni décollement ni glissement.

### 3.4. Déplacement libre du sol $g(z)$

#### 3.4.1. Déformée libre d’origine statique (poussées latérales)

On s’intéresse ici à la situation d’une fondation profonde édifée dans un terrain faisant l’objet d’un déplacement transversal notée  $g(z)$ . Celle-ci peut être liée à l’application d’un chargement superficiel (remblaiement, bâtiment voisin fondé superficiellement etc.) ou d’une excavation à proximité de la fondation profonde. Cette déformée transversale du terrain a pour conséquence d’induire dans la fondation profonde des sollicitations additionnelles (moments fléchissants et efforts tranchants) qu’il convient de prendre dans la justification structurale de la fondation. A noter qu’en toute rigueur, un tel phénomène s’accompagne généralement d’un mécanisme de frottement négatif lié au tassement du terrain à proximité de la fondation profonde que l’on peut appréhender par un modèle de type t-z, à l’aide du module TASPPIE+ par exemple.

Ce déplacement  $g(z)$ , également appelé déplacement libre du sol (en ce sens qu’il correspond par convention au déplacement qui serait obtenu au droit de la fondation profonde, en l’absence de celle-ci), peut être estimé par des solutions en élasticité dans le cas où le comportement du terrain peut être considéré comme élastique, à l’aide du module TASELDO par exemple. Il peut également être estimé en ayant recours à des modèles numériques 2D ou 3D sans prise en compte de la fondation profonde, avec des lois de comportement aptes à rendre compte du comportement non drainé ou drainé des terrains en place et des effets de plasticité éventuels (notamment pour des problèmes de remblai sur sol compressible où les niveaux de sécurité sont faibles en comparaison de ceux requis pour une fondation superficielle).

La norme NF P 94 262 propose une méthode empirique pour évaluer la fonction  $g(z)$  à court et à long terme pour des fondations situées à proximité du pied d’un remblai sur sols mous. Elle résulte de nombreuses mesures de déplacements effectuées en France dans les années 1970-1980, sur une quinzaine de sites différents (Bourges et al., 1980).

Dans le cadre de cette méthode empirique, le déplacement libre du sol est défini comme le produit de deux termes :

$$g(z) = g_{\max} G(Z) \quad \text{avec} \quad Z = z/D$$

Où :

- $z$  profondeur comptée depuis le toit de la couche compressible ;
- $D$  épaisseur de la couche compressible ;
- $g_{max}$  déplacement horizontal maximal du sol compressible dont la valeur dépend, d'une part de la position relative du pieu par rapport au remblai et, d'autre part du planning prévu pour les travaux (Figure 12);
- $G(Z)$  déformée adimensionnelle supposée indépendante du temps et de la position du pieu (Figure 11).

Les observations faites sur un grand nombre de cas réels ont permis de mettre en évidence que la déformée adimensionnelle  $G(Z)$  en pied de remblai est invariable en fonction du temps et qu'elle correspond généralement à l'une des deux courbes de la Figure 11. On utilise la courbe I dans le cas général et la courbe II lorsqu'il existe en surface une couche moins déformable (couche surconsolidée, par exemple) sur une hauteur d'au moins  $0,3D$ . Les équations de ces deux déformées adimensionnelles sont les suivantes :

- courbe I :  $G(Z) = 1,83 Z^3 - 4,69 Z^2 + 2,13 Z + 0,73$  ;
- courbe II :  $G(Z) = -2,0 Z^3 + 1,5 Z + 0,5$ .

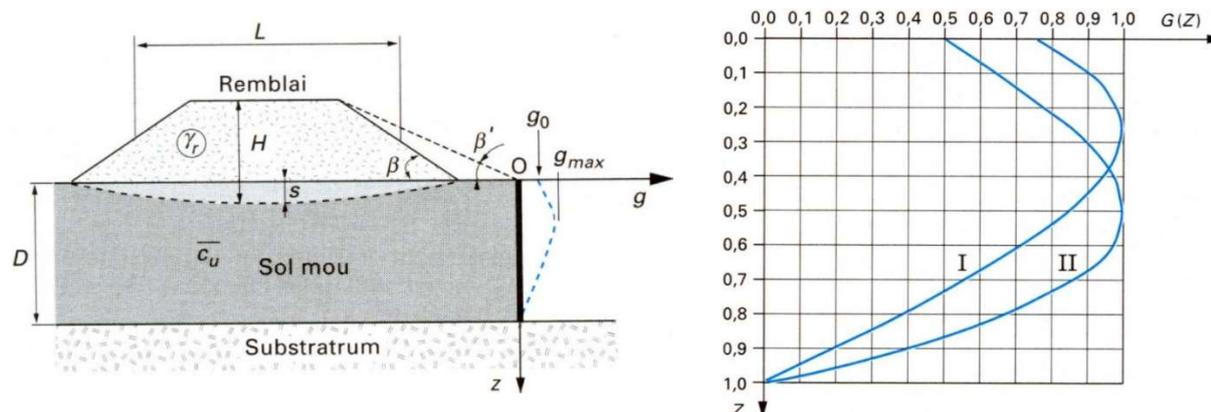


Figure 11 : Conventions et notations de la méthode empirique- Déformée adimensionnelle  $G(Z)$

L'amplitude maximale du déplacement horizontal de la couche compressible est ensuite estimée comme la somme de deux termes :

$$g_{max} = g_{max,0} + \Delta g_{max}(t)$$

Avec :

- $g_{max,0}$  déplacement instantané (à considérer uniquement si la fondation profonde est réalisée avant édification du remblai) ;
- $\Delta g_{max}(t)$  déplacement différé fonction de la durée d'exploitation de l'ouvrage.

La valeur de  $g_{max,0}$  est reliée empiriquement à la position de la fondation profonde par rapport au pied du remblai ainsi qu'à la réserve de sécurité disponible entre la charge appliquée par le remblai et la contrainte de rupture du sol compressible. La Figure 12 (gauche) donne le rapport  $g_{max,0}/D$  en fonction de deux paramètres : un paramètre géométrique « m » caractérisant la

position relative de la fondation profonde par rapport à la crête du remblai, et un coefficient de sécurité « f » vis à vis de la portance du sol compressible.

La valeur  $\Delta g_{\max}(t)$  est reliée empiriquement au tassement différé  $\Delta s(t)$  à l'axe du remblai à l'instant t. La valeur de  $\Delta s(t)$  résulte dans la pratique d'un calcul préalable à l'aide d'un modèle de type TASSELDO+ par exemple. Le rapport  $\Delta g_{\max}(t)/\Delta s(t)$  est donné sur la Figure 12 (droite) pour un talus 3H/2V en fonction de la position relative de la fondation profonde : celui-ci varie entre 0,25 pour une fondation positionnée sous la crête du talus à 0,16 pour une fondation positionnée en pied de talus.

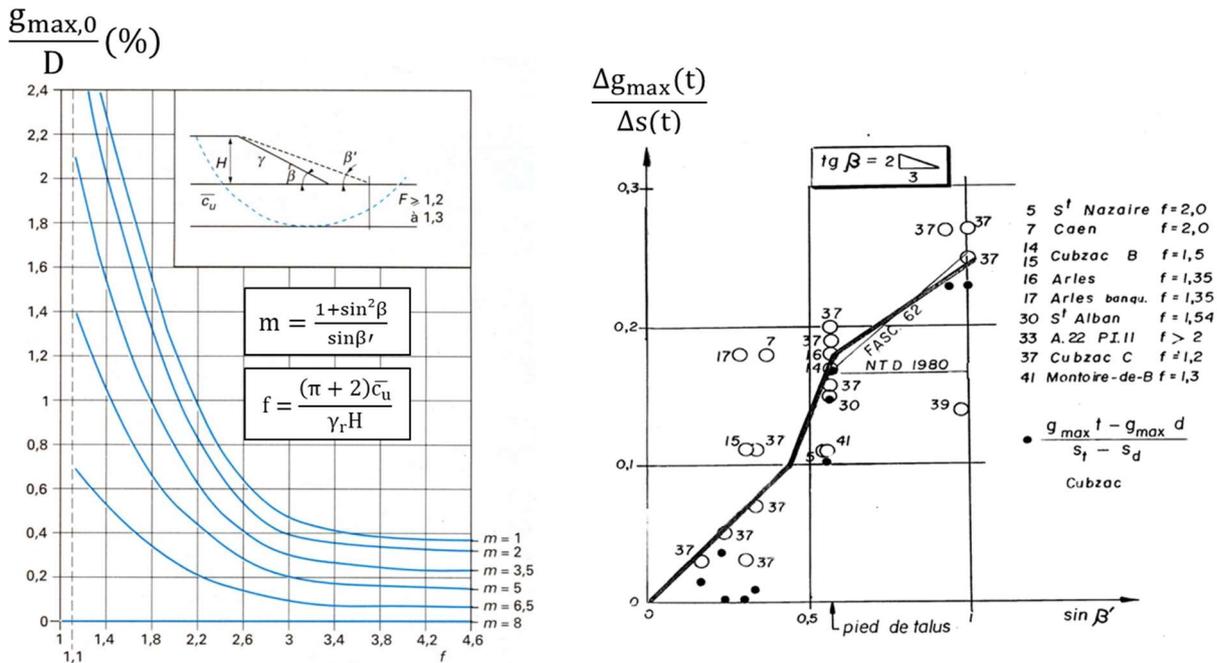


Figure 12 : Abaqués expérimentaux pour l'estimation de  $g_{\max,0}/D$  et  $\Delta g_{\max}(t)/\Delta s(t)$

### 3.4.2. Déformée d'origine sismique

Sous chargement sismique, on distingue pour les fondations profondes deux types d'actions sismiques :

- Les actions inertielles : ce sont les forces provenant de la superstructure en lien avec les effets d'inertie qui s'y développent lorsque le sol support est soumis à un mouvement sismique. Dans PIECOEF+ ces actions sont gérées par un calcul sous charges en tête en considérant des lois de réaction adaptées au caractère dynamique de la sollicitation sismique ;
- Les actions cinématiques : ce sont les forces résultant de la déformation du sol environnant due au passage des ondes sismiques. Pour les fondations profondes, ces mécanismes d'interaction sont comparables à ceux décrits dans le cas de poussées transversales du sol (§3.4.1).

Dans la pratique, le traitement de ces actions sismiques sous PIECOEF+ est mené de façon « découplée » vis-à-vis des actions inertielles conformément aux modalités suivantes :

- Adaptation des lois de réaction et du produit d'inertie de la fondation profonde au caractère dynamique de la sollicitation sismique ;

- Choix d'une condition de blocage élastique en tête compatible avec la capacité du système de liaison à s'opposer ou non à la rotation en tête de la fondation. Au titre d'une approche enveloppe, une condition en tête de type « rotation bloquée » peut être considérée (en définissant une raideur rotationnelle en tête  $C = 10^{10}$  kNm/rad par exemple) ;
- Définition d'un déplacement libre du terrain  $g(z)$  compatible avec l'intensité du séisme et la rigidité du terrain.

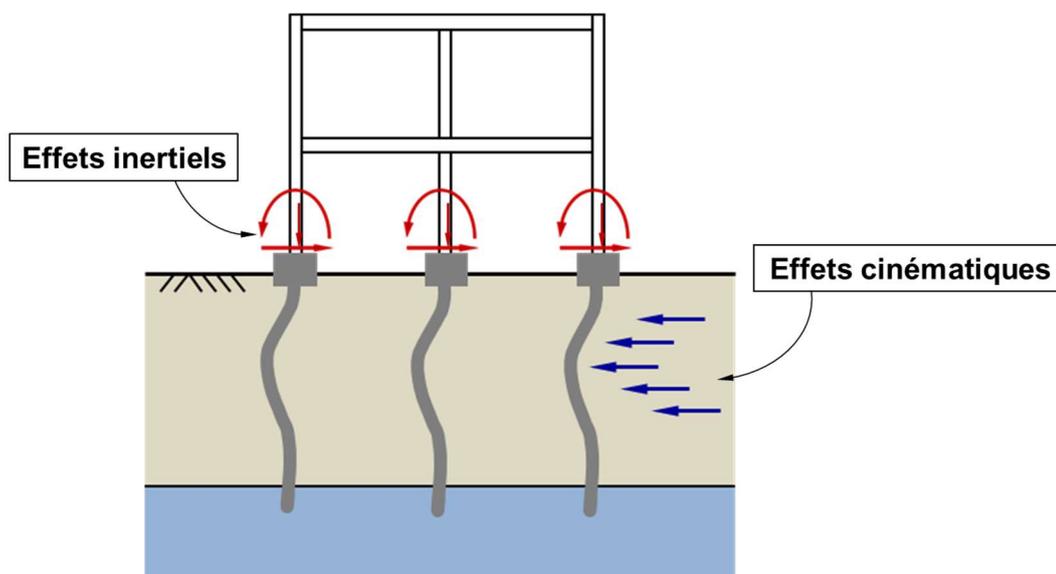


Figure 13 : Concepts d'effets inertiels et cinématiques sous séisme

Pour un terrain constitué d'une couche molle surmontant un substratum (sismique) peu déformable, la déformée cinématique  $g(z)$  sous séisme peut être approchée par un quart de sinuséide d'amplitude égale à  $g_{\max} = g(0)$  comme le schématise la figure suivante.

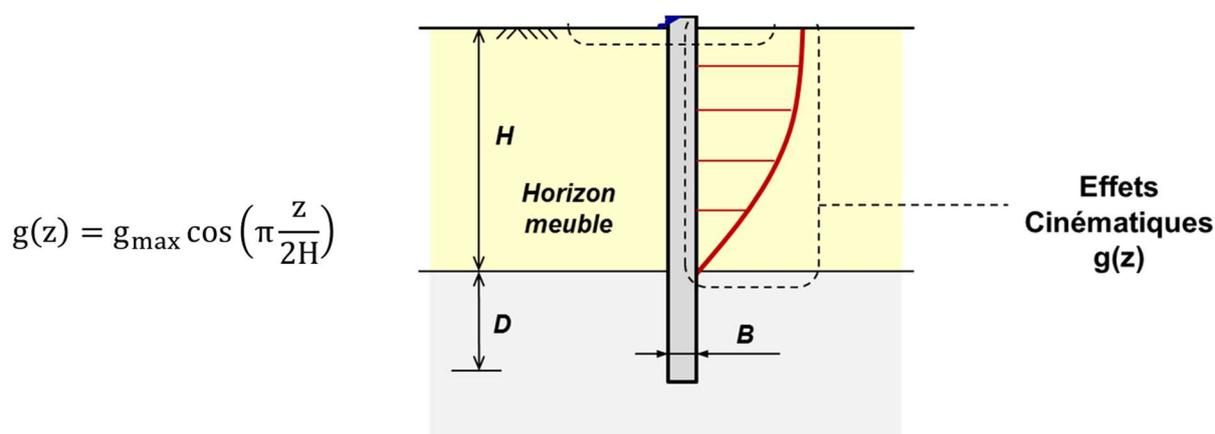


Figure 14 : Déformée cinématique pour un monocouche

L'amplitude maximale de la déformée cinématique peut être obtenue à partir de l'Eurocode 8 – partie I selon le formalisme suivant :

$$g_{\max} = 0,025 \cdot T_C T_D \cdot a_N$$

Avec :

- $T_C T_D$  produit « spectral » fonction de la classe conventionnelle du terrain ;

- $a_N$  accélération sismique nominale (PGA en surface) fonction de la zone de sismicité, de la catégorie d'importance de l'ouvrage et de la classe conventionnelle du terrain.

Ces deux grandeurs peuvent être déterminées selon les indications de la figure suivante.

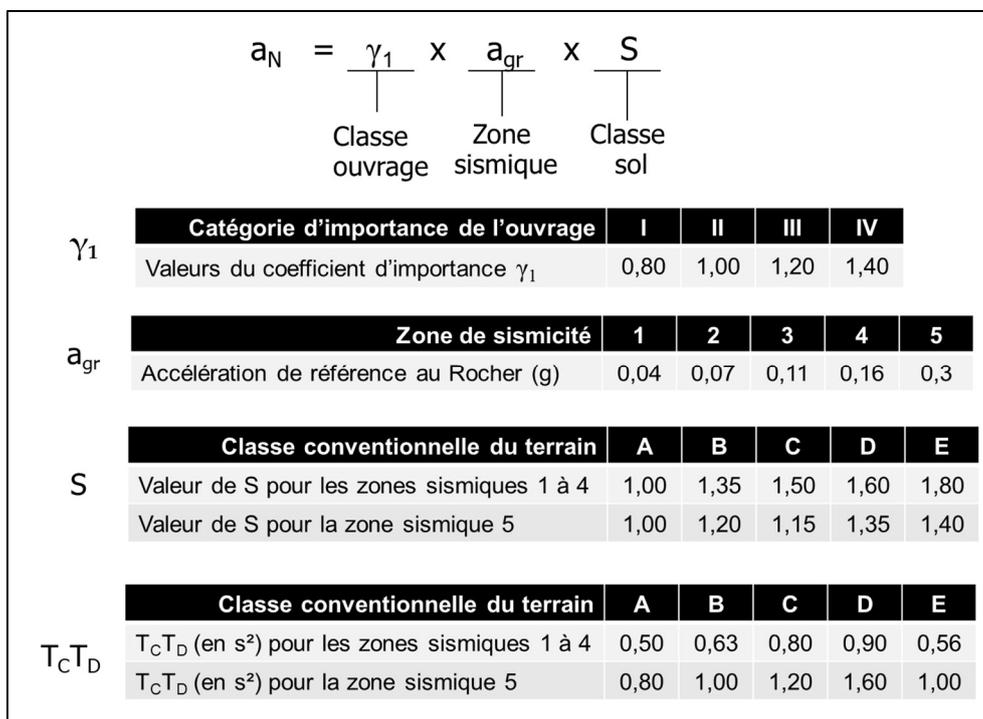


Figure 15 : Formalisme conventionnel pour déterminer l'accélération nominale  $a_N$  et le produit spectral  $T_C T_D$  selon l'Eurocode 8

Pour un terrain multicouche, la déformée cinématique peut être obtenue préalablement par un modèle numérique 1D simulant la propagation des ondes de cisaillement dans un terrain multicouche. A partir de ce modèle, la déformée cinématique est définie comme étant le mode de vibration fondamentale du multicouche.

### 3.5. Exploitation des résultats

#### 3.5.1. Les déplacements et sollicitations internes

La mise en œuvre du modèle PIECOEF+ permet d'avoir accès aux diagrammes de déplacements, rotations, réactions et sollicitations internes dans l'élément de fondation.

Le modèle PIECOEF+ suit une procédure de calcul élasto-plastique. La réaction du terrain issue du modèle est ainsi par construction compatible avec le seuil de plasticité imposé par l'utilisateur. Ce seuil de plasticité est pris réglementairement égal à la pression de fluage sous chargement en tête de courte ou longue durée (voir §3.2.1 et §3.2.2). Ce plafonnement à la pression de fluage, propre aux règles françaises, couvre de façon conservatrice l'effet des chargements cycliques sur toute la durée d'exploitation de l'ouvrage pour tous les cas de charges prévus dans les Eurocodes nécessitant une vérification des déplacements (ELS Caractéristiques et ELS Fréquentes).

Ainsi d'un point de vue strictement réglementaire, la justification transversale de la fondation profonde se ramène dans la pratique à :

- Une analyse de l'amplitude des déplacements vis-à-vis des critères de conception de l'ouvrage porté ;
- Une analyse des sollicitations internes (T, M) vis-à-vis de la résistance structurale de la fondation profonde (vérification de type Eurocode 2 ou 3 selon le matériau constitutif de la fondation).

### 3.5.2. Matrice de rigidité en tête

Dans le cadre des analyses d'interaction sol-structure, la réponse en tête d'une fondation profonde, peut être entièrement décrite par une matrice de rigidité, calculée automatiquement par PIECOEF+ et qui relie le torseur appliqué (T, M) au vecteur de déplacements qui en résulte ( $y, \omega$ ) :

$$\begin{pmatrix} T \\ M \end{pmatrix}_{\text{tête}} = \begin{pmatrix} K_{HH} & K_{HM} \\ K_{HM} & K_{MM} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \omega \end{pmatrix}_{\text{tête}} \quad (6)$$

Où :

- $K_{HH}$  ( $= \rho_1$ ) raideur horizontale en tête pour une rotation nulle ( $\omega = 0$ ) ;
- $K_{MM}$  ( $= \rho_3$ ) raideur rotationnelle en tête pour une translation nulle ( $y = 0$ ) ;
- $K_{HM}$  ( $= \rho_2$ ) raideur de couplage rotation/translation.

Les trois termes ( $K_{HH}$ ,  $K_{HM}$  et  $K_{MM}$ ) forment un tout indissociable. En particulier, le terme de rigidité non diagonal  $K_{HM}$  ne peut être négligé en dehors de certains cas particuliers (moment nul  $M = 0$  ou rotation complètement bloquée  $\omega = 0$  en tête). Ce terme de couplage traduit le fait que l'application d'une force horizontale (ou d'un moment) génère à la fois un déplacement horizontal et une rotation en tête de la fondation.

Le cas conventionnel d'un pieu articulé en tête ( $M = 0$ ) permet une simplification de la matrice de rigidité (6) comme suit :

$$T_{\text{tête}} = \left[ K_{HH} - \frac{K_{HM}^2}{K_{MM}} \right] \cdot y_{\text{tête}} \quad \text{pour } M = 0$$

Le cas particulier d'un pieu dont la tête est bloquée en rotation ( $\omega = 0$ ) permet également une simplification de la matrice de rigidité (6) comme suit :

$$T_{\text{tête}} = K_{HH} \cdot y_{\text{tête}} \quad \text{pour } \omega = 0$$

Dans le cas général, le couplage avec le modèle « structure » peut être mené à l'aide un modèle analogue dans lequel la fondation profonde est représentée par l'intermédiaire d'une barre rigide de longueur  $L_{\text{eq}} = |K_{HM}/K_{HH}|$  supportée par un jeu de ressorts découplés ( $K_V, K_H, K_M$ ) comme illustré sur la figure suivante (Caira et Brûlé, 2017). À noter que dans le cadre d'une telle modélisation, la descente de charge en tête du pieu doit, par construction, être appliquée en tête de la barre rigide et non dans les ressorts placés en pied. Enfin, sur la figure ci-dessous,  $K_V$  désigne la raideur verticale de la fondation profonde estimée par un calcul préalable sous TASPIE+.

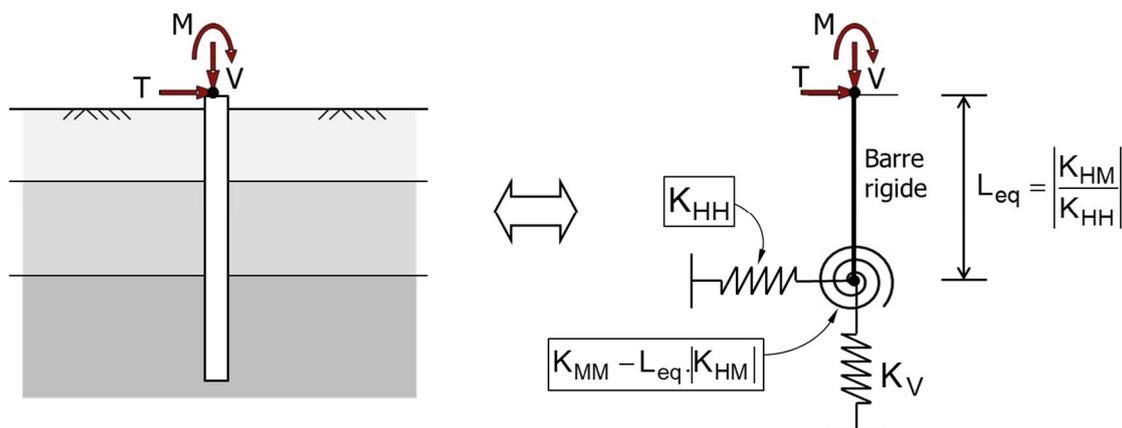


Figure 16 : Modèle analogique pour la prise en compte des termes de couplage

Le formalisme de l'équation (6) est en toute rigueur valable dans le cadre simplifié d'un terrain de comportement linéaire et en l'absence de tout chargement extérieur autre que celui appliqué en tête de la fondation. En dehors de ce cadre simplifié, la relation entre le torseur appliqué en tête et le déplacement qui en résulte obéit au formalisme général suivant :

$$\begin{pmatrix} T \\ M \end{pmatrix}_{\text{tête}} = \begin{pmatrix} K_{HH} & K_{HM} \\ K_{HM} & K_{MM} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ \omega \end{pmatrix}_{\text{tête}} + \begin{pmatrix} T_0 \\ M_0 \end{pmatrix}$$

Où  $(K_{HH}, K_{HM}, K_{MM})$  constituent ici la matrice de la rigidité « tangente », complétée par un torseur de référence  $(T_0, M_0)$  qui correspond à « l'ordonnée » à l'origine de la courbe de réponse de la fondation en tête. Le torseur de référence et la matrice de rigidité tangente sont indissociables et varient en fonction du niveau de chargement.

L'obtention d'un torseur de référence non nul reflète la non-linéarité du comportement du sol et/ou la présence d'un chargement autre que celui appliqué en tête de la fondation profonde (par exemple, un effet  $g(z)$ , une charge répartie le long du fût etc.). L'effet de ce torseur de référence sur la structure portée se traduit par un déplacement et/ou une rotation permanente qui ne peuvent être ignorés dans les analyses ISS.

## 4. Flambement et effets de 2<sup>nd</sup> ordre

### 4.1. Introduction

Le flambement est la survenue d'une déformée latérale non nulle sous l'effet d'un chargement axial et en l'absence de tout chargement transversal ( $q = 0$ ). Cette forme d'instabilité élastique apparaît pour des valeurs précises de l'effort axial ainsi appliqué dites "efforts de flambement". La valeur minimale de ces efforts est appelée "effort critique de flambement". Pour les problèmes de fondations, cela concerne les pieux de grande longueur ou de faible rigidité (micropieux, inclusions souples) ou des pieux libres sur une partie de leur hauteur. Il existe en réalité une analogie mathématique directe entre le flambement en tant que mécanisme d'instabilité élastique et la "résonance" en tant que mécanisme d'instabilité dynamique qui apparaît pour des valeurs précises de la fréquence d'excitation d'un système élastique. L'approche de calcul utilisée dans PIECOEF+ s'appuie sur cette analogie et conduit la recherche des efforts de flambement selon la méthode de valeurs propres en tirant profit de la formulation matricielle présentée en §2.4.

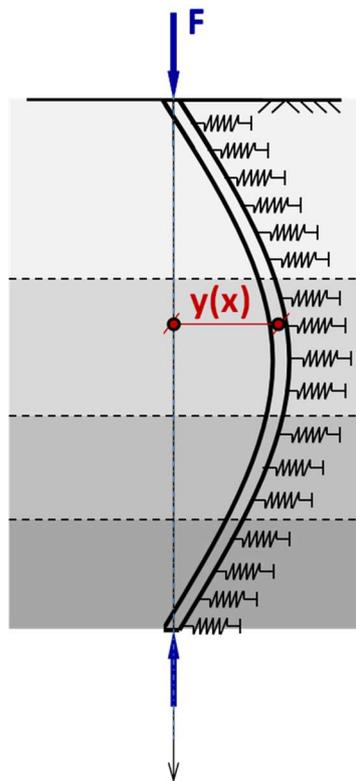


Figure 17 : Instabilité élastique par flambement d'une fondation profonde

### 4.2. Formulation

On considère le cas d'une fondation profonde soumise à deux efforts de compression opposés sur ses deux extrémités. L'équilibre transversal de 2<sup>nd</sup> ordre de la fondation profonde se traduit par l'équation :

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[ EI(z) \frac{d^2 y(z)}{dz^2} \right] + F \frac{d^2 y(z)}{dz^2} = B(z) [q(z) - p(z)] \quad (7)$$

On cherche les valeurs de  $F$  permettant d'obtenir une solution non nulle  $y(z)$  de cette équation en l'absence de tout chargement latéral sur le pieu  $q(z) = 0$ . Dans le cadre de la formulation matricielle présentée en §2.4, cela équivaut à :

$$[\mathbf{K}^e + \mathbf{K}^s]. \mathbf{y} = F. \mathbf{M}. \mathbf{y} \quad (8)$$

Avec :

- $\mathbf{K}^e$  matrice de rigidité de la fondation profonde (1<sup>er</sup> ordre) de taille  $n \times n$ ;
- $\mathbf{K}^s$  matrice de rigidité du sol (1<sup>er</sup> ordre) de taille  $n \times n$ ;
- $\mathbf{M}$  matrice rotation (effet de 2<sup>nd</sup> ordre) de taille  $n \times n$ .
- $n$  nombre de degrés de liberté du système =  $2(p+1)$  où  $p$  est le nombre d'éléments.

Par construction,  $F$  est un effort de flambement si et seulement si l'équation (8) admet une solution non nulle  $\mathbf{y}$ . Mathématiquement, cela signifie que  $F$  est une valeur propre du système et que  $\mathbf{y}$  est le vecteur propre associé. C'est ce traitement matriciel qui est implémenté dans PIECOEF+ qui extrait ainsi l'ensemble des valeurs propres, notées  $F_i$ , du système (8) et les déformées propres associées, notées  $\mathbf{y}_i$ . Chaque couple  $(F_i, \mathbf{y}_i)$  correspond à un mode de flambement bien précis comme l'illustre la figure ci-dessous.

L'effort critique flambement correspond à la plus petite des valeurs propres :

$$F_{cr} = \min_{i=1..n} (F_i)$$

Les résultats obtenus sont identiques à ceux issus de la bibliographie pour des cas simples (Souche, Mandel, Euler...) ou à ceux obtenus par traitement numérique "pas à pas" en grandes déformations.

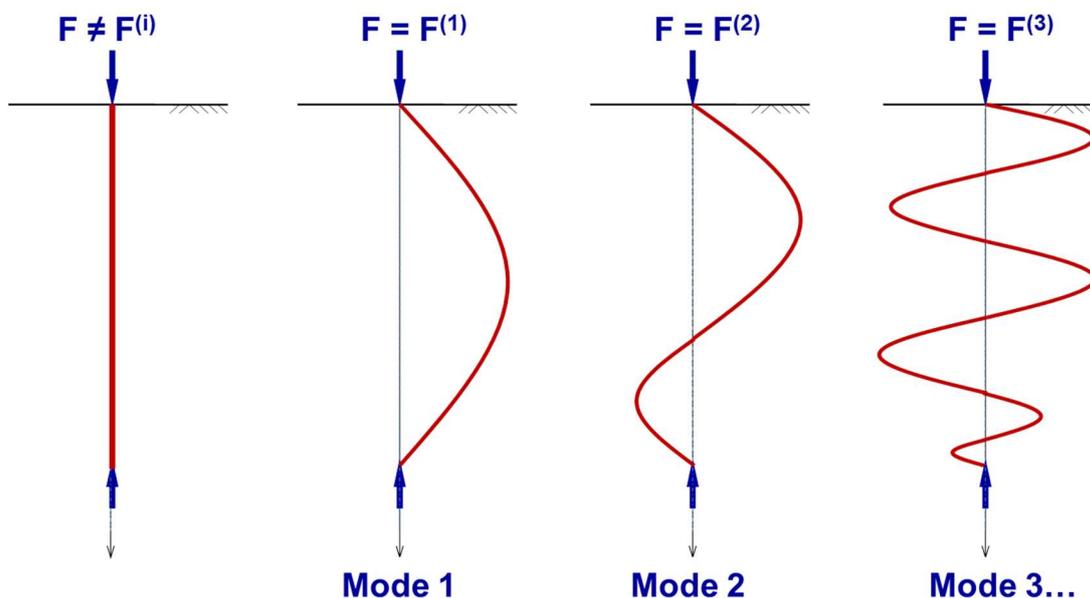


Figure 18 : Modes de flambement et efforts associés

A noter que le calcul des efforts de flambement est mené dans PIECOEF+ à l'issue de la résolution de l'équilibre « initial » de la fondation profonde sous chargement transversal. Il tient ainsi compte de la rigidité de la fondation, des conditions aux limites éventuelles, ainsi que de la part élastique de la réaction du sol obtenue à l'équilibre sous les conditions de chargement considérées.

### 4.3. Traitement des effets de 2<sup>nd</sup> ordre

#### 4.3.1. Mise en équation

On s'intéresse dans ce paragraphe au cas d'une fondation profonde présentant initialement une déformée  $y_0$  non nulle correspondant soit à un chargement transversal initial soit par exemple à un défaut de forme ou de verticalité. La fondation profonde est ensuite soumise à l'application d'un effort axial supposé entièrement récupéré en pointe (approche sécuritaire). L'application de l'effort  $F$  conduit à un supplément de déformation de 2<sup>nd</sup> ordre noté  $y$  comme le schématise la figure suivante.

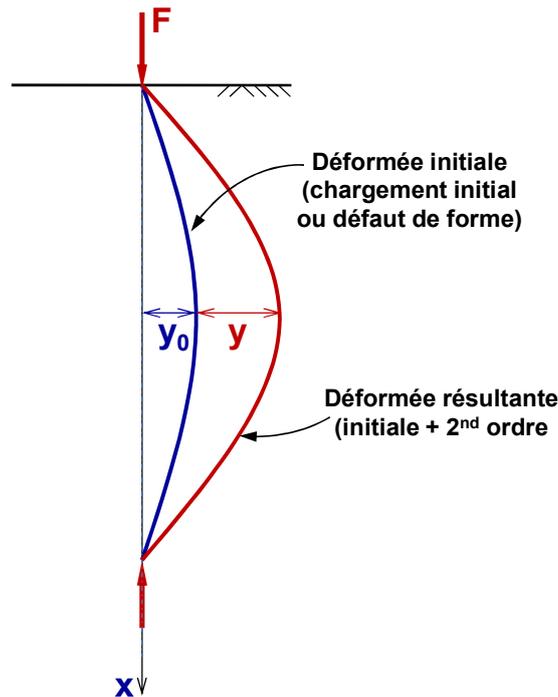


Figure 19 : Déformation de 2<sup>nd</sup> ordre sous l'effet d'un effort axial

Selon la formulation matricielle (8), l'équilibre de 2<sup>nd</sup> ordre de la fondation profonde s'écrit ainsi :

$$(\mathbf{K}^e + \mathbf{K}^s) \cdot \mathbf{y} = F \cdot \mathbf{M} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{y}_0) \quad (9)$$

En l'absence de déformée initiale ( $\mathbf{y}_0 = 0$ ), on retrouve le système (8) vérifié par les efforts de flambement  $F_i$  et les déformées associées  $\mathbf{y}_i$  :

$$(\mathbf{K}^e + \mathbf{K}^s) \cdot \mathbf{y}_i = F_i \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{y}_i \quad (10)$$

Le système étant symétrique et défini positif<sup>1</sup>, ses vecteurs propres  $\mathbf{y}_i$  forment une base orthogonale selon laquelle il est possible de décomposer tout vecteur du même espace. En particulier, la solution  $\mathbf{y}$  de l'équation (9) et la déformée initiale  $\mathbf{y}_0$  peuvent ainsi s'exprimer comme suit :

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbf{y}_i \quad \mathbf{y}_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^0 \mathbf{y}_i \quad (11)$$

<sup>1</sup>  $\mathbf{y}_i$  sont les vecteurs propres de la matrice  $(\mathbf{K}^e + \mathbf{K}^s)^{-1} \cdot \mathbf{M}$  qui est par construction symétrique définie positive.

Où  $\alpha_i$  et  $\alpha_i^0$  désignent respectivement les « coordonnées » des vecteurs  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{y}_0$  dans la base  $\{\mathbf{y}_i\}$ . Les coefficients  $\alpha_i$  représentent les « inconnues » du problème. Les coefficients  $\alpha_i^0$  sont obtenus préalablement par projection à l'aide de la relation :

$$\alpha_i^0 = \frac{{}^t\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_0}{{}^t\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_i}$$

En combinant les équations (9), (10) et (11), on aboutit au système suivant :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i F_i \cdot \mathbf{y}_i = F \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \alpha_i^0) \cdot \mathbf{y}_i$$

Soit, en projetant selon chacun des vecteurs (orthogonaux)  $\mathbf{y}_i$  :

$$\alpha_i F_i = F(\alpha_i + \alpha_i^0) \quad \forall i = 1..n$$

Ou encore :

$$\alpha_i = \frac{F}{F_i - F} \alpha_i^0 \quad \forall i = 1..n$$

On en déduit donc l'expression de la déformée "résultante" tenant compte des termes de 2<sup>nd</sup> ordre :

$$\mathbf{y} + \mathbf{y}_0 = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \alpha_i^0) \mathbf{y}_i = \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{F_i - F} \alpha_i^0 \mathbf{y}_i \quad (12)$$

Ainsi, selon chaque déformée propre  $\mathbf{y}_i$ , la déformée résultante est amplifiée d'un facteur  $\lambda_i$  égal à :

$$\lambda_i = \frac{F_i}{F_i - F}$$

Pour  $F < F_{cr} = \text{Min}(F_i)$ , ce facteur d'amplification est strictement supérieur à 1 pour tous les modes. On constate en particulier que lorsque  $F$  tend vers l'une des efforts de flambement  $F_i$ , le facteur d'amplification correspondant  $\lambda_i$  tend vers l'infini. Cela signifie que la fondation profonde périra toujours par « flexion composée » (par effet de 2<sup>nd</sup> ordre) bien avant que l'effort critique de flambement ne soit atteint.

### 4.3.2. Mise en œuvre pratique

Le traitement matriciel décrit en §4.3.1 a été implémenté dans PIECOEF+. Après avoir extrait les efforts de flambement (valeurs propres du système) et déformées propres associés (vecteurs propres du système), le programme exploite ensuite l'équation (12) pour évaluer la déformée résultante ( $\mathbf{y} + \mathbf{y}_0$ ) pour un effort axial  $F = 0$  (calcul de 1<sup>er</sup> ordre),  $F = 0,2 F_{cr}$ ,  $F = 0,4 F_{cr}$ ,  $F = 0,6 F_{cr}$  et  $F = 0,8 F_{cr}$ . Pour chaque déformée de 2<sup>nd</sup> ordre, un calcul des sollicitations (moments fléchissants) est établi en distinguant les deux situations suivantes :

- Déformée initiale liée à un chargement transversal : les moments fléchissants sont calculés à partir de la déformée résultante  $\mathbf{y} + \mathbf{y}_0$  ;
- Déformée initiale liée à un défaut de forme ou de verticalité : les moments fléchissants sont calculés à partir de la déformée additionnelle  $\mathbf{y}$ .

## 5. Traitement des déformations d'effort tranchant

### 5.1. Principe

L'ensemble des développements présentés précédemment s'appuie sur une discrétisation de la fondation profonde en éléments de poutre mince. L'hypothèse des poutres minces est implicitement introduite dans le modèle de Bernoulli qui consiste à négliger la contribution des déformations de cisaillement. La validité de cette hypothèse exige dans la pratique un rapport longueur/diamètre de la fondation au moins supérieur à 10 voire 20 dans certaines conditions d'appui. Le cas d'une fondation profonde de faible longueur et d'une manière générale le cas où les déformations de cisaillement ne peuvent être négligées, justifie le recours à un modèle de comportement adapté aux poutres épaisses, dit de Timoshenko.

La mise en équation de ce modèle nécessite de définir, en plus du produit d'inertie  $EI$ , la rigidité au cisaillement notée  $GS'$ . Pour un pieu de section homogène, celle-ci peut être estimée par le produit du module du cisaillement  $G$  et de la section "réduite"  $S'$  (voir §5.2). La combinaison des équations d'équilibre et de comportement conduit au système d'équations suivant :

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[ EI \frac{d\omega}{dz} \right] = B(z)[q(z) - p(z)] \quad GS' \left( \omega - \frac{dy}{dz} \right) + \frac{d}{dz} \left[ EI \frac{d\omega}{dz} \right] = 0$$

Où, en plus des grandeurs déjà définies en §2.4 :

- $GS'$  est la rigidité au cisaillement de la fondation profonde ;
- $\omega$  désigne la distorsion (ou rotation) qui, dans le cadre du modèle des poutres épaisses, diffère de la dérivée première du déplacement transversal  $y$ .

La résolution de ce système est menée numériquement en introduisant une discrétisation de la fondation profonde en éléments de poutre épaisse. Les éléments utilisés sont des éléments à 2 nœuds et 4 degrés de liberté par nœud : 1 déplacement, 1 rotation ainsi que leurs deux dérivées premières respectives. Dans le cadre de cette discrétisation, l'équilibre de la fondation se traduit par une formulation matricielle similaire à celle présentée en §2.4.3 , de taille  $4(p+1) \times 4(p+1)$  où  $p$  désigne le nombre total d'éléments.

### 5.2. Détermination de la rigidité au cisaillement $GS'$

La rigidité au cisaillement  $GS'$  est le produit, du module de cisaillement  $G$  du matériau constitutif de la fondation, par la section réduite  $S'$ . Le module de cisaillement s'exprime en fonction du module d'Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$  à l'aide de la relation :  $G = E/2(1+\nu)$ . Quant à la section réduite  $S'$ , celle-ci est égale à une fraction de la section de la fondation profonde  $S$ . Le rapport  $S'/S$  dépend de la forme géométrique de la section. On donne ci-après quelques ordres de grandeur pour les formes géométriques courantes :

- Section rectangulaire pleine  $S' = 5/6 S$
- Section circulaire pleine  $S' = 6/7 S$
- Profilé tubulaire mince  $S' = 1/2 S$
- Profilé H  $S' = 1/3 \text{ à } 2/3 S$

## 6. Bibliographie

Baguelin F., Bustamante M. et Frank R. (1986). The pressuremeter for foundations: French experience. Proc. Conference Use of In-Situ Tests in Geotechnical Engng, Blacksburg, VA, ASCE, Geot. Special Pub., n° 6, 31-46.

Bourges F., Frank R. et Mieussens C. (1980). Calcul des efforts et des déplacements engendrés par des poussées latérales de sol sur les pieux. Note Technique du Département Sols et Fondations, LCPC, Paris, 17 p.

Bourgeois E., Burlon S. et Cuira F. (2018). Modélisation numérique des ouvrages géotechniques. Techniques de l'ingénieur, C 258.

Cuira F. (2012). Modélisation du flambement d'un pieu souple dans un sol multicouche. JNGG, Bordeaux.

Cuira F. et Brûlé S. (2017). Pratique de l'interaction sol-structure sous séisme. AFNOR Editions.

Cuira F. et Simon B. (2016). Apports de l'interaction sol-structure dans la conception des fondations. JNGG, Nancy.

Frank R., Cuira F., et Burlon S. (2018). Calcul des fondations superficielles et profondes. Presses des Ponts.

Frank R. (1984). Études théoriques de fondations profondes et d'essais en place par autoforage dans les Laboratoires des Ponts et Chaussées et résultats pratiques (1972-1983). Rapport de recherche LPC n° 128, LCPC, Paris, juin, 95 p

Gazetas G. (1991). Formulas and charts for impedances of surfaces and embedded foundations. Journal of Geotechnical Engineering, 117, 9.

Vaziri H., Simpson B, Pappin J.W., Simpson L. (1982), Integrated forms of Mindlin's equations. Géotechnique, 32, 3, 275-278.