



Foxta v5

Manuel utilisateur – Partie C.8 – Notice technique du module TASSELDO+

Date	Révision	Etabli par	Vérifié par	Commentaires
10/04/2020	Ind A	MT. Hoang	F. Cuira	Première émission
14/09/2022	Ind B	MT. Hoang	F. Cuira	Maj 4.1
25/03/2026	Ind C	MT. Hoang	F. Cuira	Mise en forme pour Foxta v5

Table des matières

1. Préambule	4
2. Aspects théoriques.....	5
2.1. Solution de Boussinesq pour une charge ponctuelle	5
2.1.1. Incréments de contrainte	5
2.1.2. Champs de déplacement	6
2.2. Intégration sous le coin d'une charge rectangulaire	6
2.2.1. Incréments de contrainte	6
2.2.2. Champs de déplacement	7
2.2.3. Transformation de coordonnées	7
2.2.4. Calcul en un point quelconque	8
2.3. Intégration sous le coin d'une charge triangulaire	8
2.3.1. Incréments de contrainte	8
2.3.2. Champs de déplacement	9
2.3.3. Transformation de coordonnées	9
2.3.4. Calcul en un point quelconque	10
2.4. Extension au cas d'un terrain multicouche.....	10
2.4.1. Principe général	10
2.4.2. Calcul des contraintes.....	11
2.4.3. Calcul des tassements.....	11
2.4.4. Calcul des déplacements horizontaux.....	12
2.5. Calcul en élasticité non-linéaire	12
2.6. Calcul oedométrique.....	14
2.7. Calcul de consolidation	15
2.7.1. Bases théoriques.....	15
2.7.2. Combinaison avec le calcul des tassements	17
2.7.3. Prise en compte de la contribution des drains.....	18
2.8. Dossier de validation.....	18
3. Mise en œuvre pratique.....	19
3.1. Modélisation	19
3.1.1. Stratigraphie	19
3.1.2. Loi de comportement du terrain	21
3.1.3. Consolidation.....	21
3.1.4. Fluage.....	23
3.1.5. Charges	23

3.2. Exploitation des résultats	24
3.2.1. Contraintes	24
3.2.2. Déplacements	25
3.2.3. Modules de déformation.....	25
3.2.4. Consolidation.....	27
3.3. Passerelle avec d'autres modules.....	28
3.3.1. Passerelle avec TASPLAQ.....	28
3.3.2. Passerelle avec TASPIE+.....	28
3.3.3. Passerelle avec PIECOEF+	28
4. Bibliographie.....	29
Annexe 1 – Fonctions de « forme » pour les charges rectangulaires et triangulaires.....	30
Annexe 2 – Procédures d'interpolation pour une stratigraphie par points de sondages	33

1. Préambule

Le module TASSELDO+ est un programme de calcul basé sur des solutions analytiques en élasticité dérivées du modèle de Boussinesq. Il permet le calcul des contraintes et des déplacements dans un massif de stratigraphie variable, soumis à un chargement vertical de forme quelconque. Le terrain est constitué d'une succession de couches de comportement élastique linéaire ou non-linéaire, ou oedométrique. TASSELDO+ est doté d'un outil d'interpolation 3D permettant de générer une stratigraphie tridimensionnelle à partir d'un groupe de sondages. De multiples assistants sont disponibles pour la génération automatique d'un maillage de chargement et de points de calcul.

Pour un comportement élastique non-linéaire, TASSELDO+ permet un ajustement automatique des modules de déformation, au droit de chaque de point de calcul, selon une courbe de dégradation pré-définie par l'utilisateur. Des assistants sont disponibles pour générer des dégradation empiriques directement à partir du pressiomètre (ARSCOP, 2018).

TASSELDO+ permet également de réaliser, au droit de chaque point de calcul, des calculs de consolidation unidimensionnelle basés sur la théorie développée par Terzaghi.

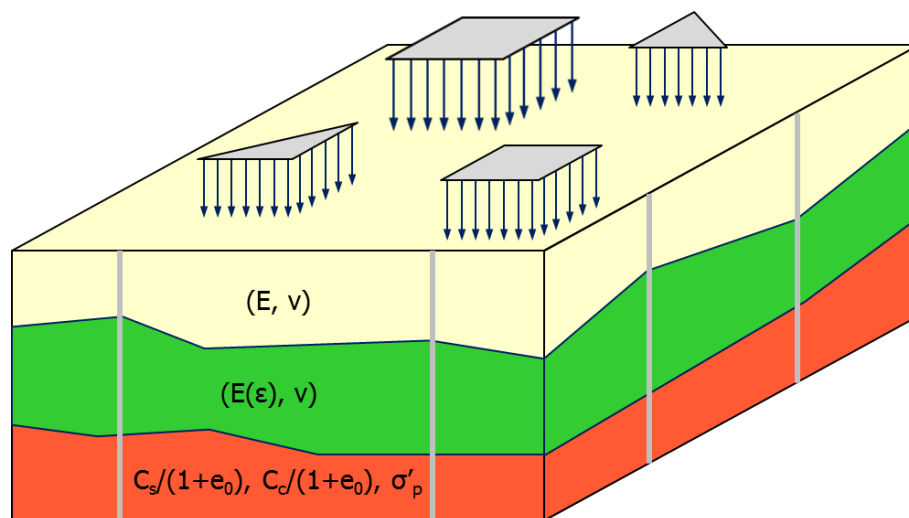


Figure 1 : Principe du modèle TASSELDO+

La mise en œuvre du modèle donne accès, au droit de chaque de point de calcul, aux résultats suivants :

- Profils de contraintes verticale et horizontales ;
- Profils de déplacements vertical (tassement) et horizontaux ;
- Variation du module de déformation avec la profondeur ;
- Variation du taux de consolidation avec le temps et la profondeur.

2. Aspects théoriques

2.1. Solution de Boussinesq pour une charge ponctuelle

2.1.1. Incréments de contrainte

Le problème original de Boussinesq s'intéresse au cas théorique d'un massif élastique isotrope soumis à l'application d'une charge ponctuelle Q comme le montre la figure suivante.

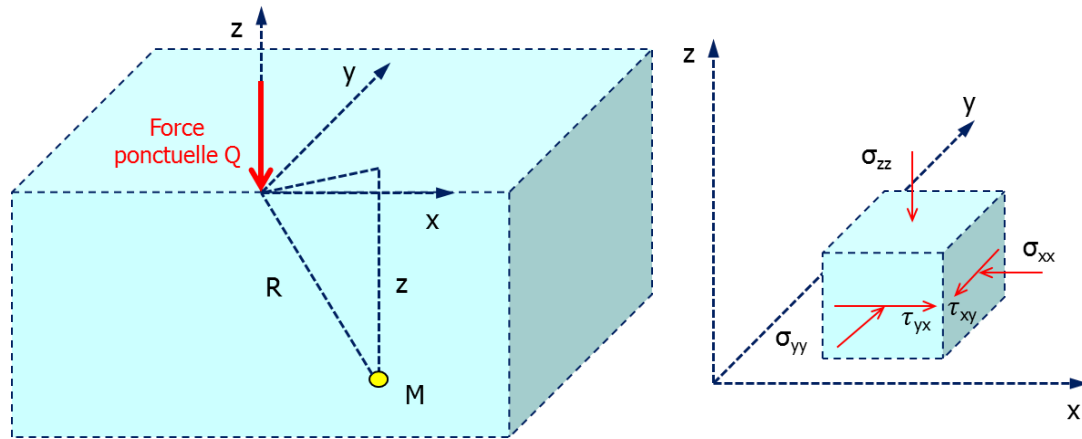


Figure 2 : Modèle de Boussinesq pour une charge ponctuelle

La variation des contraintes induite par la charge en un point M(x,y,z) du massif a été donnée par Boussinesq (Terzaghi, 1943) :

$$\Delta\sigma_{zz} = \frac{Q}{2\pi} \frac{3z^3}{R^5} \quad (1)$$

$$\Delta\sigma_{xx} = \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{3zx^2}{R^5} - (1-2\nu) \left(\frac{y^2}{R^2(R-z)^2} - \frac{x^2+z^2}{R^3(R-z)} \right) \right) \quad (2)$$

$$\Delta\sigma_{yy} = \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{3zy^2}{R^5} - (1-2\nu) \left(\frac{x^2}{R^2(R-z)^2} - \frac{y^2+z^2}{R^3(R-z)} \right) \right) \quad (3)$$

$$\Delta\tau_{xy} = \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{3zyx}{R^5} + (1-2\nu) \frac{xy(2R-z)}{R^3(R-z)^2} \right) \quad (4)$$

Avec $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et :

$\Delta\sigma_{zz}$ incrément de contrainte verticale,

$\Delta\sigma_{xx}$ incrément de contrainte horizontale selon x,

$\Delta\sigma_{yy}$ incrément de contrainte horizontale selon y,

$\Delta\tau_{xy}$ incrément de contrainte de cisaillement dans le plan Oxy,

ν coefficient de Poisson.

On note que les quatre composantes tendent vers l'infini au voisinage du point d'application de la charge Q (lorsque R tend vers 0). A noter également que ces expressions sont indépendantes du module de déformation (cas d'un terrain homogène) et que le coefficient de Poisson intervient uniquement dans le calcul des contraintes horizontales et de cisaillement.

2.1.2. Champs de déplacement

La solution de Boussinesq donne également, pour le problème de la Figure 2, l'expression des déplacements selon x, y et z au point M :

$$u_z = -\frac{(1 + \nu)Q}{2\pi E} \left(\frac{z^2}{R^3} + \frac{2(1 - \nu)}{R} \right) \quad (5)$$

$$u_x = -\frac{(1 + \nu)Q}{2\pi E} \left(\frac{zx}{R^3} + (1 - 2\nu) \frac{x}{R(R - z)} \right) \quad (6)$$

$$u_y = -\frac{(1 + \nu)Q}{2\pi E} \left(\frac{zy}{R^3} + (1 - 2\nu) \frac{y}{R(R - z)} \right) \quad (7)$$

Où : u_x déplacement horizontal selon x,
 u_y déplacement horizontal selon y,
 u_z déplacement vertical selon z,
 E module de Young du sol,
 ν coefficient de Poisson du sol.

On note que les trois composantes du déplacement tendent vers l'infini au voisinage du point d'application de la charge Q (quand R tend vers 0).

2.2. Intégration sous le coin d'une charge rectangulaire

2.2.1. Incréments de contrainte

L'intégration des expressions (1) à (4) sous le coin d'une charge rectangulaire uniforme q de dimensions $L_x \times L_y$ (Figure 3) conduit aux expressions générales suivantes :

$$\Delta\sigma_{zz} = \frac{q}{2\pi} (I_{1,z} + z I_{2,z}) \quad (8)$$

$$\Delta\sigma_{xx} = \frac{q}{2\pi} (I_{1,x} + (1 - 2\nu)I_{2,x}) \quad (9)$$

$$\Delta\sigma_{yy} = \frac{q}{2\pi} (I_{1,y} + (1 - 2\nu)I_{2,y}) \quad (10)$$

$$\Delta\tau_{xy} = \frac{q}{2\pi} (I_{1,xy} + (1 - 2\nu)I_{2,xy}) \quad (11)$$

Les fonctions $I_{1,x}$, $I_{1,y}$, $I_{1,z}$, $I_{1,xy}$, $I_{2,x}$, $I_{2,y}$, $I_{2,z}$ et $I_{2,xy}$ sont données en Annexe 1.

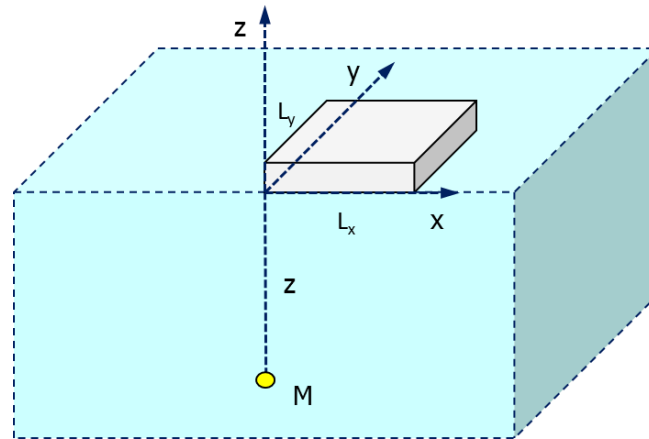


Figure 3 : Intégration de la solution de Boussinesq sous le coin d'une charge rectangulaire

2.2.2. Champs de déplacement

L'intégration des expressions (5) à (7) sous le coin d'une charge rectangulaire uniforme q de dimensions $L_x \times L_y$ (Figure 3) conduit aux expressions générales suivantes :

$$u_z = \frac{(1 + \nu)q}{2\pi E} (2(1 - \nu)zF_{1,z} + (1 - 2\nu)F_{2,z}) \tag{12}$$

$$u_x = \frac{(1 + \nu)q}{2\pi E} (2(1 - \nu)zF_{1,x} + (1 - 2\nu)F_{2,x}) \tag{13}$$

$$u_y = \frac{(1 + \nu)q}{2\pi E} (2(1 - \nu)zF_{1,y} + (1 - 2\nu)F_{2,y}) \tag{14}$$

Les fonctions $F_{i,x}$, $F_{i,y}$ et $F_{i,z}$ ($i = 1$ ou 2) sont données en Annexe 1.

2.2.3. Transformation de coordonnées

Les composantes horizontales des déplacements et des contraintes (équations 9 à 11 et 13 à 14) sont établies en coordonnées « locales » (repère local associé à la charge). Le passage en repère « global » impose un changement de coordonnées selon les conventions et les notations de la figure suivante.

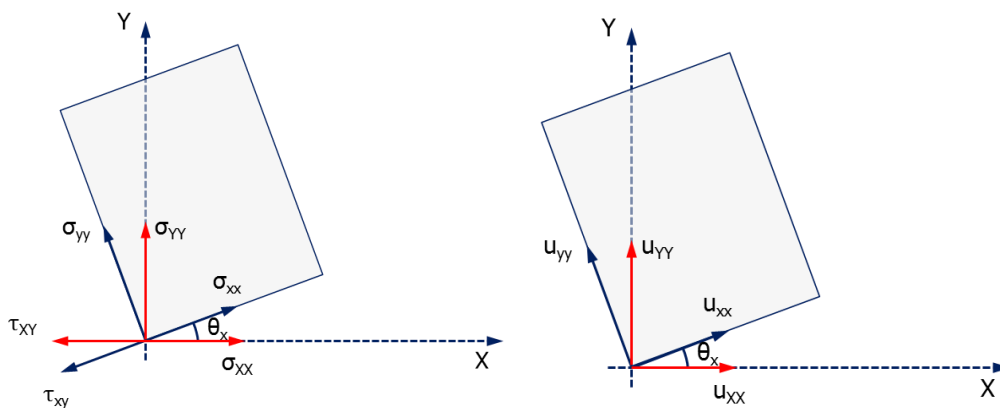


Figure 4 : Transformation de coordonnées – Charge rectangulaire – conventions et notations

Avec les notations de la Figure 4, le passage en coordonnées globales est opéré selon le formalisme mathématique suivant :

$$\Delta\sigma_{XX} = \Delta\sigma_{xx} \cos^2 \theta_x + \Delta\sigma_{yy} \sin^2 \theta_x - 2\Delta\tau_{xy} \sin \theta_x \cos \theta_x \quad (15)$$

$$\Delta\sigma_{YY} = \Delta\sigma_{xx} \sin^2 \theta_x + \Delta\sigma_{yy} \cos^2 \theta_x + 2\Delta\tau_{xy} \sin \theta_x \cos \theta_x \quad (16)$$

$$\Delta\tau_{XY} = (\Delta\sigma_{xx} - \Delta\sigma_{yy}) \sin \theta_x \cos \theta_x + \Delta\tau_{xy} (\cos^2 \theta_x - \sin^2 \theta_x) \quad (17)$$

$$u_{XX} = u_{xx} \cos \theta_x - u_{yy} \sin \theta_x \quad (18)$$

$$u_{YY} = u_{xx} \sin \theta_x + u_{yy} \cos \theta_x \quad (19)$$

2.2.4. Calcul en un point quelconque

Le calcul des déplacements et des contraintes en un point M quelconque (qui n'est pas nécessairement situé sous le coin de la charge) est mené en tirant profit du principe de superposition algébrique selon les traitements géométriques schématisés par la Figure 5.

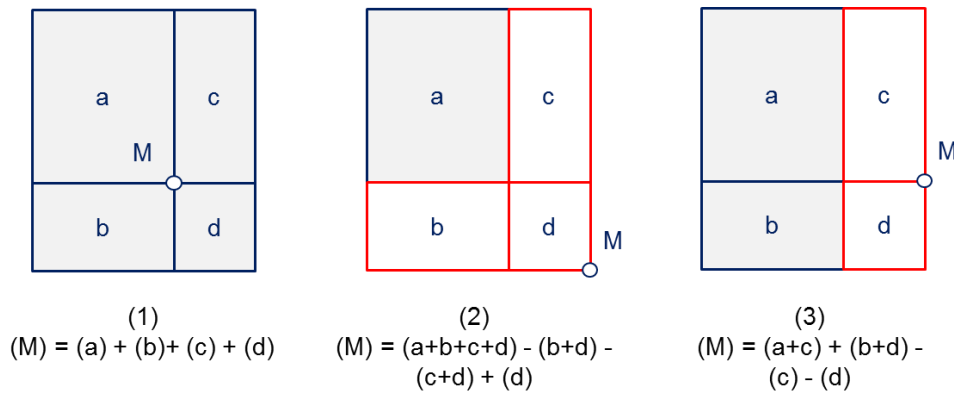


Figure 5 : Application du principe de superposition pour le calcul du tassement en un point différent du coin de la charge – cas d'une charge rectangulaire

2.3. Intégration sous le coin d'une charge triangulaire

2.3.1. Incréments de contrainte

L'intégration des expressions (1) à (4) sous le coin d'une charge triangulaire uniforme q de dimensions $(d_{12} \times d_{13} \times d_{23})$ conduit aux expressions générales suivantes :

$$\Delta\sigma_{zz} = \frac{q}{2\pi} (G_{1,z} + z G_{2,z}) \quad (20)$$

$$\Delta\sigma_{22} = \frac{q}{2\pi} (G_{1,x} + (1 - 2\nu)G_{2,x}) \quad (21)$$

$$\Delta\sigma_{33} = \frac{q}{2\pi} (G_{1,y} + (1 - 2\nu)G_{2,y}) \quad (22)$$

$$\Delta\tau_{23} = \frac{q}{2\pi} (G_{1,xy} + (1 - 2\nu)G_{2,xy}) \quad (23)$$

Les fonctions $G_{1,x}$, $G_{1,y}$, $G_{1,z}$, $G_{1,xy}$, $G_{2,x}$, $G_{2,y}$, $G_{2,z}$ et $G_{2,xy}$ sont données en Annexe 1.

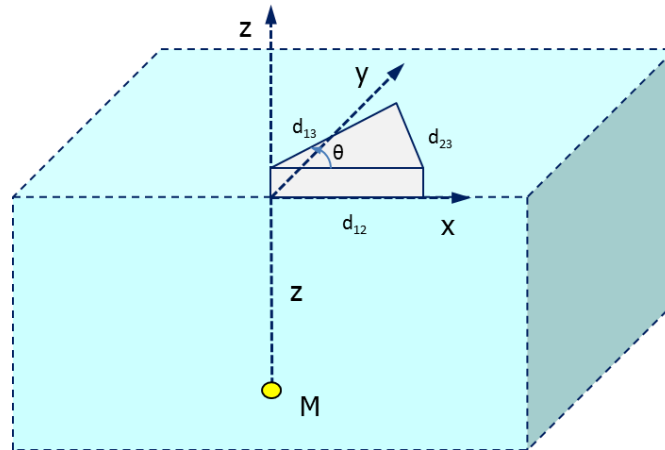


Figure 6 : Intégration de la solution de Boussinesq sous le coin d'une charge triangulaire

2.3.2. Champs de déplacement

L'intégration des expressions (5) à (7) sous le coin d'une charge triangulaire uniforme q de dimensions ($d_{12} \times d_{13} \times d_{23}$) conduit aux expressions générales suivantes :

$$u_z = \frac{(1 + \nu)q}{2\pi E} (2(1 - \nu)zT_{1,z} + (1 - 2\nu)T_{2,z}) \quad (24)$$

$$u_{2,h} = \frac{(1 + \nu)q}{2\pi E} (2(1 - \nu)zT_{1,x} + (1 - 2\nu)T_{2,x}) \quad (25)$$

$$u_{3,h} = \frac{(1 + \nu)q}{2\pi E} (2(1 - \nu)zT_{1,y} + (1 - 2\nu)T_{2,y}) \quad (26)$$

Les fonctions $T_{1,x}$, $T_{1,y}$, $T_{1,z}$, $T_{2,x}$, $T_{2,y}$ et $T_{2,z}$ sont données en Annexe 1.

2.3.3. Transformation de coordonnées

Les composantes horizontales des déplacements et des contraintes (équations 20 à 22 et 25 à 26) sont établies en coordonnées « locales » (repère local associé à la charge). Le passage en repère « global » impose un changement de coordonnées selon les conventions et les notations de la Figure 7. Cela conduit au formalisme mathématique suivant :

$$\Delta\sigma_{XX} = \cos^2 \theta_x \sigma_{22} - 2 \cos \theta_x \sin \theta_x \tau_{23} + \sin^2 \theta_x \sigma_{2p2p} \quad (27)$$

$$\Delta\sigma_{YY} = \sin^2 \theta_x \sigma_{22} + 2 \sin \theta_x \cos \theta_x \tau_{23} + \cos^2 \theta_x \sigma_{2p2p} \quad (28)$$

$$\Delta\tau_{XY} = \sin \theta_x \cos \theta_x (\sigma_{22} - \sigma_{2p2p}) + (\cos^2 \theta_x - \sin^2 \theta_x) \tau_{23} \quad (29)$$

$$u_{XX} = u_{2,h} \cos \theta_x - u_{2p,h} \sin \theta_x \quad (30)$$

$$u_{YY} = u_{2,h} \sin \theta_x + u_{2p,h} \cos \theta_x \quad (31)$$

$$\text{avec } \sigma_{2p2p} = \frac{\sigma_{33} - \cos^2 \theta \sigma_{22} - \sin 2\theta \tau_{23}}{\sin^2 \theta} \quad \text{et} \quad u_{2p,h} = \frac{u_{3,h} - \cos \theta u_{2,h}}{\sin \theta}$$

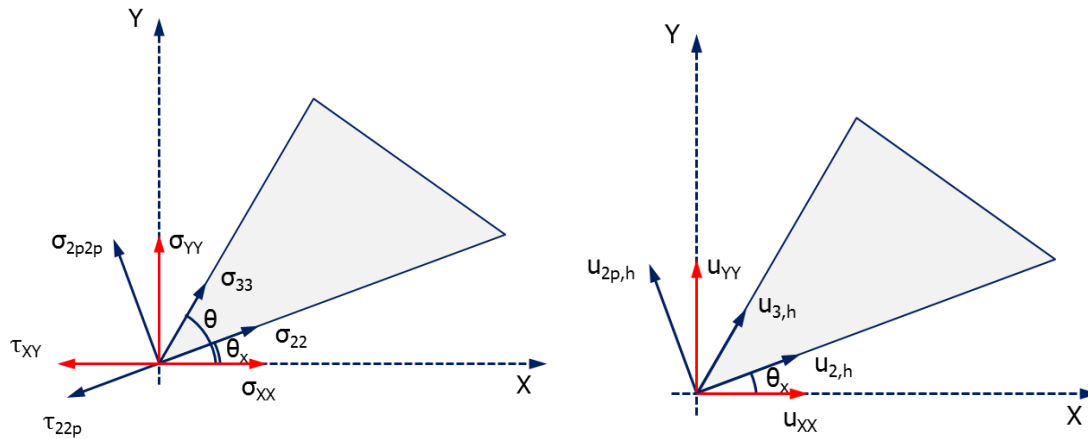


Figure 7 : Transformation de coordonnées – Charge triangulaire – conventions et notations

2.3.4. Calcul en un point quelconque

Le calcul des déplacements et des contraintes en un point M quelconque (qui n'est pas nécessairement situé sous le coin de la charge) est mené en tirant profit du principe de superposition algébrique selon les traitements géométriques schématisés par la figure suivante.

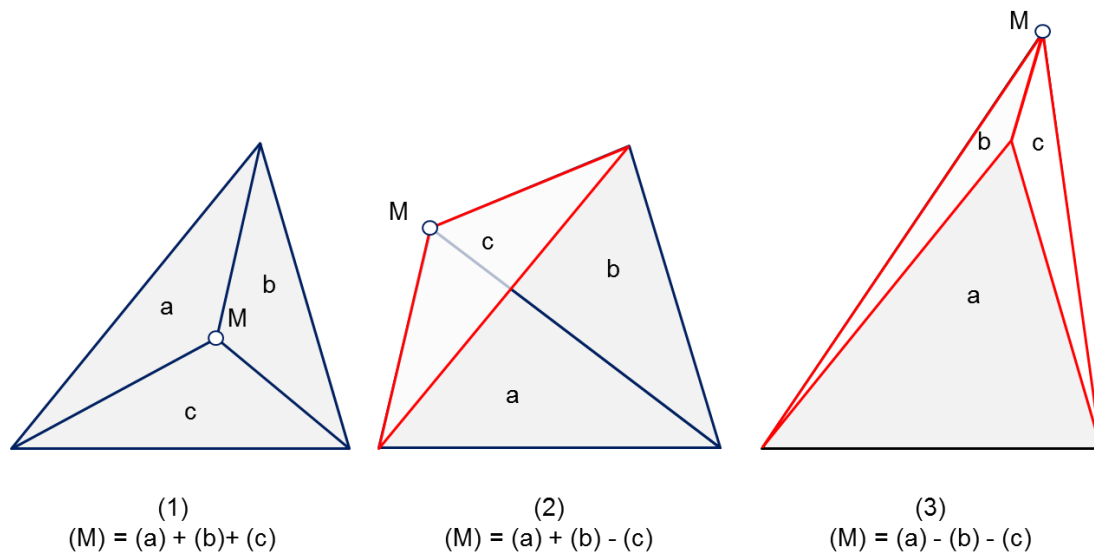


Figure 8 : Application du principe de superposition pour le calcul du tassement en un point différent du coin de la charge – cas d'une charge triangulaire

2.4. Extension au cas d'un terrain multicouche

2.4.1. Principe général

La solution de Boussinesq ayant été établie à l'origine pour le cas d'un massif élastique homogène isotrope, son extension au cas d'un multicouche est traitée usuellement en supposant que les contraintes se propagent de la même façon dans le cas multicouche que dans le cas d'un terrain homogène. Cette simplification a été discutée d'une manière approfondie par Burland (1977) qui a conclu qu'elle était effectivement acceptable pour la majorité des situations courantes

rencontrées par l'ingénieur. Une exception notable demeure le cas d'une couche très raide surmontant une couche plus déformable, où l'application de la solution de Boussinesq conduit à une estimation par excès des contraintes et des déplacements dans la couche déformable (ce qui demeure néanmoins du côté de la sécurité).

Il existe néanmoins des solutions alternatives permettant de s'affranchir de cette simplification est résolvant « rigoureusement » l'équilibre élastique d'un multicouche horizontal. Parmi ces solutions, on peut citer le modèle de Burmister dont la solution a été également implémentée dans TasselDO (version interne Terrasol). Le temps de calcul demeure cependant plus important que celui nécessaire à la mise en œuvre du modèle de Boussinesq généralisé.

2.4.2. Calcul des contraintes

Le calcul des contraintes est mené selon les principes du §2.4.1. On admet donc que les expressions données en §2.1.1, §2.2.1 et §2.3.1 demeurent applicables.

On applique ensuite le principe de superposition pour traiter un chargement comportant plusieurs charges rectangulaires et/ou triangulaires.

2.4.3. Calcul des tassements

2.4.3.1. Tassement 3D (calcul de référence)

Le tassement d'un terrain multicouche peut être traité à l'aide de l'approche simplifiée de Steinbrenner (Terzaghi, 1943) :

$$s_{3D} \approx \sum_{i=1}^N [s_{ref}(z_i, E_i, \nu_i) - s_{ref}(z_{i+1}, E_i, \nu_i)] \quad (32)$$

avec (voir Figure 9) :

- N nombre de couches
- s_{ref} tassement selon la solution Boussinesq donnée par les équations (5), (12) ou (24)
- E_i, ν_i module de Young et coefficient de Poisson de la couche « i »
- z_i profondeur du toit de la couche « i »

L'utilisation de cette approche suppose implicitement que les contraintes se propagent de la même façon dans le cas multicouche que dans le cas d'un terrain homogène (§2.4.1).

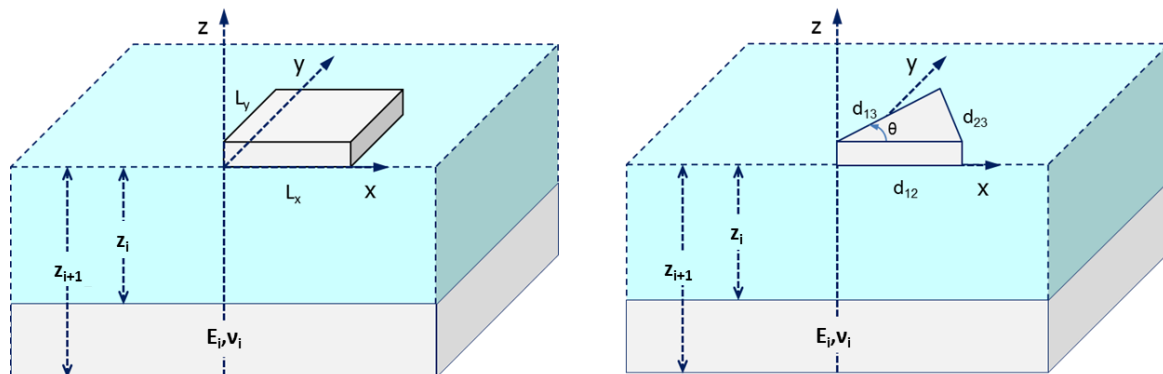


Figure 9 : Conventions pour le traitement d'un terrain multicouche

On applique ensuite le principe de superposition pour traiter un chargement comportant plusieurs charges rectangulaires et/ou triangulaires. L'attention est attirée sur le fait qu'un tel calcul intègre explicitement l'effet des déformations latérales (ce qui est par construction ignoré dans les approches unidimensionnelles usuelles qui exploitent la notion de module oedométrique et supposent que les déformations latérales sont bloquées, voir §2.4.3.2).

2.4.3.2. Tassement 1D

Au titre d'une analyse complémentaire, TASSELDO+ permet également d'évaluer le tassement par une approche unidimensionnelle qui néglige l'effet des déformations latérales (conditions dites « oedométriques »). Cette simplification peut se révéler légitime pour le tassement à l'axe d'un chargement étendu. Pour des chargements localisés ou pour des calculs en dehors de l'axe de la charge, il convient de privilégier l'approche 3D décrite en §2.4.3.1.

En reprenant les notations la Figure 9, le tassement 1D est calculé à l'aide de la relation :

$$s_{1D} \approx \sum_{i=1}^N \frac{\Delta\sigma_{zz}(i)}{E_{\text{oed}}(i)} H_i \quad \text{avec} \quad E_{\text{oed}}(i) = \frac{1 - \nu_i}{(1 + \nu_i)(1 - 2\nu_i)} \cdot E_i$$

Avec :

- N nombre de couches
- E_i, ν_i module de Young et coefficient de Poisson de la couche « i »
- H_i épaisseur de la couche « i »
- $\Delta\sigma_{zz}(i)$ incrément de contrainte verticale à mi-hauteur de la couche i obtenu selon les modalités du §2.4.2.

2.4.4. Calcul des déplacements horizontaux

Le calcul des déplacements horizontaux est mené à l'aide des expressions données en §2.1.2, §2.2.2 et §2.3.2. Les déplacements horizontaux au sein de la couche « i » sont ainsi calculés en considérant le module de Young E et le coefficient de Poisson de la couche « i ». On applique ensuite le principe de superposition pour traiter un chargement comportant plusieurs charges rectangulaires et/ou triangulaires.

2.5. Calcul en élasticité non-linéaire

TASSELDO+ permet également de mener des calculs en élasticité non-linéaire. La déformabilité du terrain est alors caractérisée au moyen d'une courbe de dégradation permettant d'ajuster le module de déformation E à la déformation verticale $\varepsilon_v = \Delta s / \Delta z$ produite dans chaque (sous)couche comme le montre la Figure 10. Avec les notations de cette figure, on a :

- E_0 module de référence défini par l'utilisateur ;
- k_0 valeur du module du rapport E/E_0 pour une déformation nulle
- ε_0 déformation de référence correspondant à $E/E_0 = k_0/2$

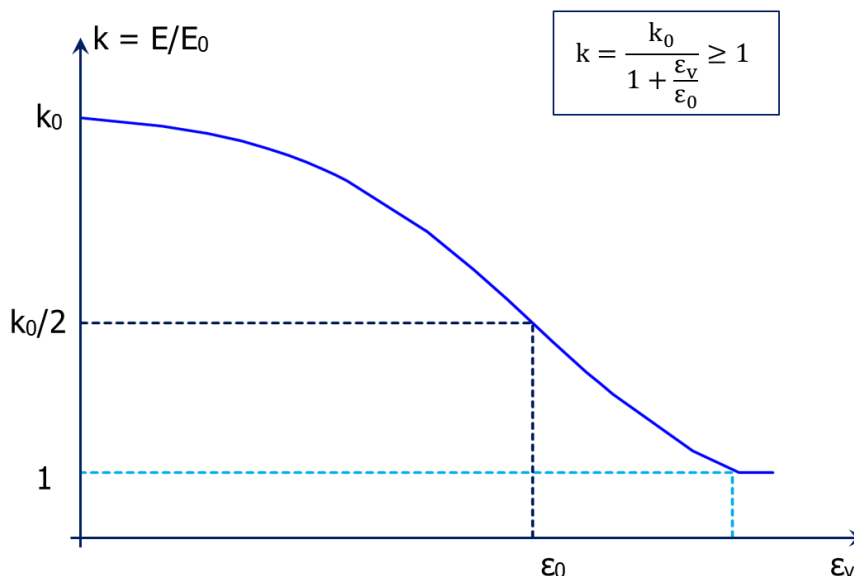


Figure 10 : Courbe de dégradation des modules de déformation en fonction de la déformation verticale

Le calage des modules de déformation est appliqué au droit de chaque point de calcul et au niveau de chaque (sous)couche. Il en résulte une cartographie des modules de déformation variant avec x, y et z comme le montre la figure suivante.

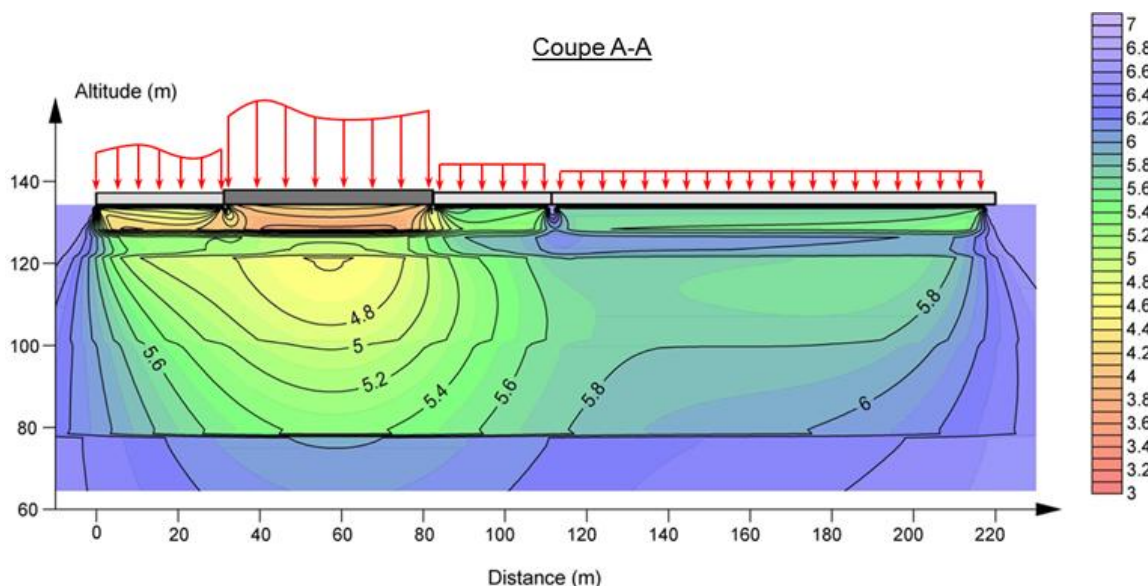


Figure 11 : Cartographie des modules de déformation (normalisés par E_0) obtenue par application d'un modèle élastique non-linéaire

Les tassements et déplacements horizontaux sont ensuite calculés selon les mêmes principes qu'en §2.4.3 et §2.4.4 en exploitant, au droit de chaque point de calcul, le profil des modules de déformation ainsi calés.

2.6. Calcul oedométrique

Pour une couche dite « compressible » (i.e. indice de vide élevé, forte teneur en eau), le choix d'un comportement oedométrique peut être plus approprié. Dans ce cas, TASSELDO+ évalue le tassement oedométrique de ladite couche à l'aide de la relation :

$$s_{oedo} \approx \sum_{i=1}^n \varepsilon_{oed}(i) h_i \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{oed}(i) = \frac{\Delta e(i)}{1 + e_0(i)}$$

Avec :

- n nombre de subdivisions de la couche étudiée
- h_i épaisseur de la subdivision « i »
- $\varepsilon_{oed}(i)$ déformation oedométrique évaluée à mi-hauteur de la subdivision « i »
- $e_0(i)$ indice des vides initial de la subdivision « i »
- $\Delta e(i)$ variation de l'indice des vides de la subdivision « i »

La déformation oedométrique ε_{oed} est évaluée selon le formalisme mathématique suivant :

$$\varepsilon_{oed} = \frac{C_s}{1 + e_0} \log\left(\frac{\sigma'_p}{\sigma'_{v0}}\right) + \frac{C_c}{1 + e_0} \log\left(\frac{\sigma'_{v0} + \Delta\sigma_v}{\sigma'_p}\right) \quad \text{si } \sigma'_{v0} + \Delta\sigma_v \geq \sigma'_p$$

$$\varepsilon_{oed} = \frac{C_s}{1 + e_0} \log\left(\frac{\sigma'_{v0} + \Delta\sigma_v}{\sigma'_{v0}}\right) \quad \text{si } \sigma'_{v0} + \Delta\sigma_v \leq \sigma'_p$$

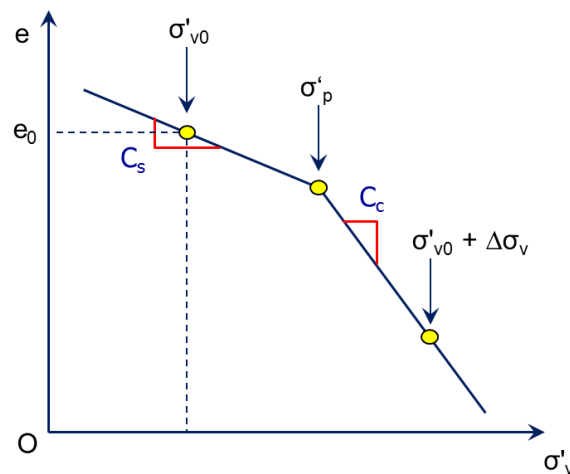


Figure 12 : Principe d'un modèle oedométrique

Où (Figure 12) :

- $\Delta\sigma_v$ incrément de contrainte verticale (obtenu selon les modalités du §2.4.2)
- $\frac{C_s}{1+e_0}$ coefficient de recompression issu de l'essai oedométrique
- $\frac{C_c}{1+e_0}$ coefficient de compressibilité vierge issu de l'essai oedométrique
- σ'_p contrainte de pré-consolidation
- σ'_{v0} contrainte verticale effective initiale

Toutes ces grandeurs sont évaluées à mi-hauteur de la subdivision considérée. Dans TASSELDO+, la contrainte de pré-consolidation σ'_p est calculée à partir d'un paramètre « t_c » selon les modalités suivantes :

- $\sigma'_p = t_c \sigma'_{v0}$ si $t_c \geq 1$
- $\sigma'_p = -t_c + \sigma'_{v0}$ si $t_c \leq 0$

La contrainte initiale σ'_{v0} est calculée à partir du poids volumique net du terrain (déjaugé lorsque le terrain est sous nappe).

Notons enfin que dans le cadre d'un modèle oedométrique, les déplacements horizontaux sont calculés selon les modalités du §2.4.4 en considérant, dans chaque subdivision, un module de Young équivalent pris forfaitairement égal à :

$$E_{eq} = \frac{1}{2} \frac{\Delta\sigma_v}{\varepsilon_{oed}}$$

Ce module est ensuite associé au coefficient de Poisson défini par l'utilisateur.

2.7. Calcul de consolidation

2.7.1. Bases théoriques

On considère le cas d'un sol fin saturé soumis à un chargement extérieur. Avant chargement, le sol est supposé en état d'équilibre. Les contraintes totales et effectives en un point M quelconque correspondent au poids des terres respectivement saturées et déjaugées, soit σ_0 et σ'_0 . La pression interstitielle est égale à la pression hydrostatique au point M considéré, soit u_0 . L'application d'un incrément de contrainte verticale $\Delta\sigma_v$ sur le massif a pour conséquence la modification des contraintes au point M comme suit :

- Variation de la pression interstitielle $\Delta u(z, t)$
- Variation de la contrainte totale $\Delta\sigma_v(z)$
- Variation de la contrainte effective $\Delta\sigma'_v(z, t) = \Delta\sigma_v(z) - \Delta u(z, t)$

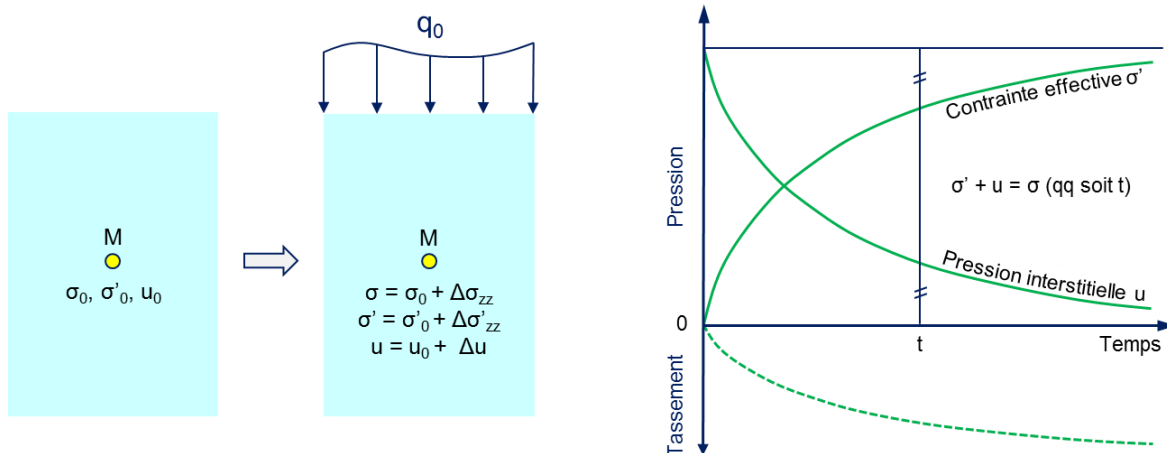


Figure 13 : Mécanisme de consolidation

Au début du chargement ($t = 0$), l'eau considérée comme incompressible supporte toute la pression et on retrouve donc $\Delta u = \Delta \sigma_v$ et $\Delta \sigma'_v = 0$. Pendant le chargement, la surpression interstitielle diminue progressivement ($\Delta u < \Delta \sigma_v$), la contrainte effective et le tassement augmentent. À l'infini, $\Delta \sigma'_v = \Delta \sigma_v$ et $\Delta u = 0$. La Figure 13 représente schématiquement l'évolution de la contrainte effective et de la pression interstitielle en fonction du temps dans le cadre d'un mécanisme de consolidation.

Ce mécanisme peut être appréhendé à l'aide de la théorie de la consolidation unidimensionnelle proposée par Terzaghi. Malgré le caractère simplifié de cette théorie, elle demeure la référence pour les calculs de consolidation et représente correctement les phénomènes observés dans les sols saturés compressibles sous les ouvrages.

L'équation de la consolidation unidimensionnelle de Terzaghi s'obtient en combinant les équations de conservation de la masse de l'eau et de la masse des particules solides, la loi de Darcy et la loi de compressibilité du squelette, écrites sous forme unidimensionnelle. Cette équation se présente sous une forme généralisée¹ :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(k_v \frac{\partial(\Delta u)}{\partial z} \right) = \frac{\gamma_w}{E_{oed}} \frac{\partial(\Delta u)}{\partial t} \quad \text{avec} \quad k_v = \frac{C_v \gamma_w}{E_{oed}} \quad (33)$$

Avec :

- C_v coefficient de consolidation verticale (définie par couche)
- $\Delta u(z,t)$ surpression interstitielle à la profondeur z et à l'instant t
- k_v perméabilité verticale du terrain
- E_{oed} module de déformation verticale en conditions oedométriques (voir §2.4.3.2)
- γ_w poids volumique de l'eau

La résolution l'équation (33) peut être menée à l'aide d'une formulation mixte en éléments finis pour la variable z et en différences finies pour la variable temps t . Dans le cadre de cette formulation, la colonne de sol est discrétisée en éléments finis linéaires à 2 nœuds et 2 degrés de liberté. La variable temps est discrétisée à l'aide d'un pas de temps Δt . La mise en œuvre de cette formulation permet de réécrire l'équation (33) sous la forme d'un système matriciel équivalent :

$$\mathbf{K}^e \cdot \mathbf{U}_{i+1} = \frac{\gamma_w}{\Delta t} \mathbf{S}^e \cdot (\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i) \quad (34)$$

Avec :

- \mathbf{K}^e matrice de perméabilité (constituée à partir des valeurs de k_v dans chaque couche)
- \mathbf{S}^e matrice de souplesse (constituée à partir des valeurs de $1/E_{oed}$ dans chaque couche)
- \mathbf{U}_i vecteur de surpression interstitielle (profil des Δu par nœud à l'instant $t_i = i \times \Delta t$)

¹ A noter que dans le cas d'un terrain homogène, cette équation peut également se mettre sous une forme plus simple :

$$C_v \frac{\partial^2(\Delta u)}{\partial z^2} = \frac{\partial(\Delta u)}{\partial t}$$

A noter qu'en terme de condition initiale, le vecteur \mathbf{U}_0 correspond au profil des surpressions interstitielle $\Delta u(z, t = 0)$, qui n'est autre que le profil des incréments de contrainte verticale $\Delta\sigma_v(z)$ au droit du point de calcul considéré.

La résolution de cette équation permet d'établir la variation de $\Delta u(z, t)$ à chaque instant et à chaque profondeur pour un multicouche quelconque. On en déduit ensuite le degré de consolidation local :

$$X_v(z, t) = 1 - \frac{\Delta u(z, t)}{\Delta\sigma_v(z)}$$

2.7.2. Combinaison avec le calcul des tassements

La résolution de l'équation (33) est menée au droit de chaque point de calcul $M(x, y)$. Cela permet d'établir, pour chaque point de calcul, un profil de $X_v(z, t)$ et $\Delta u(z, t)$.

2.7.2.1. Couches de comportement élastique (linéaire ou non-linéaire)

Le tassement d'une souscouche à l'instant t est obtenu comme suit :

$$s(z, t) = s(z, t = 0) + [s(z, t = \infty) - s(z, t = 0)]. X_v(z, t) \quad (35)$$

Où :

- $s(z, t = 0)$ tassement instantané calculé à déformation volumique nulle
- $s(z, t = \infty)$ tassement final

La valeur de $s(z, t = \infty)$ est obtenue par application des procédures décrites en §2.4.3 sous l'effet des charges appliquées sur le sol. Le tassement instantané $s(z, t = 0)$ est calculé selon ces mêmes procédures en considérant $\nu = 0,49$.

2.7.2.2. Couches de comportement oedométrique

Le tassement à l'instant t du point $M(x, y)$ peut ensuite être estimé selon deux approches :

- Approche en contraintes

On évalue l'incrément de contrainte verticale à l'instant t comme suit :

$$\Delta\sigma'_v(z, t) = \Delta\sigma_v(z). X_v(z, t) \quad (36)$$

La valeur de $\Delta\sigma_v(z)$ correspond à l'incrément de contrainte verticale obtenue en l'absence de consolidation selon les principes du §2.4.2. Les tassements à l'instant t sont ensuite calculés à partir de $\Delta\sigma'_v(z, t)$ selon les principes du §2.6.

A noter que dans le cadre de cette approche, il est d'usage de considérer que les tassements de recompression sont instantanés.

- Approche en déplacements (correspondant à la pratique usuelle)

Le degré de consolidation local $X_v(z, t)$ est directement appliqué sur le tassement produit dans chaque (sous)couche :

$$\Delta s(z, t) = \Delta s(z, t = \infty). X_v(z, t) \quad (37)$$

La valeur de $\Delta s(z, t = \infty)$ correspond au tassement, élastique ou oedométrique, obtenu en l'absence de consolidation dans la (sous)couche considérée (également appelé tassement final), selon les procédures décrites en §2.6.

2.7.3. Prise en compte de la contribution des drains

Le cas d'un terrain renforcé par drains verticaux peut être traité à l'aide de la théorie de consolidation radiale de Barron. Le coefficient de consolidation $X_r(t)$ est donné par formule :

$$X_r(t) = 1 - e^{-\frac{t}{c}} \quad \text{avec} \quad c = \frac{D_m^2}{c_r} \left(\frac{\ln(n)}{8(1 - n^{-2})} - \frac{3 - n^{-2}}{32} \right) \quad \text{et} \quad n = D_m/D_{eq}$$

Avec

- D_m diamètre équivalent de la maille,
- D_{eq} diamètre équivalent du drain,
- c_r coefficient de consolidation radiale.

Le taux de consolidation radiale $X_r(t)$ est ensuite combiné avec le taux de consolidation verticale $X_v(z,t)$ donné en §2.7.1 selon le formalisme suivant :

$$1 - X_{eq}(z, t) = [1 - X_v(z, t)][1 - X_r(t)]$$

Où $X_{eq}(z, t)$ est le taux de consolidation équivalent. La valeur de X_{eq} est ensuite utilisée pour estimer l'évolution du tassement en fonction du temps tenant compte de la contribution des drains. Les approches décrites en §2.7.2 s'appliquent en remplaçant X_v par X_{eq} .

2.8. Dossier de validation

Le module TASSELDO+ a fait l'objet d'une étude de validation approfondie. La démarche de validation s'est organisée selon 7 séries de tests :

- | | |
|---|---------|
| • Chargements rectangulaires | Série 1 |
| • Chargements triangulaires | Série 2 |
| • Loi élastique non linéaire | Série 3 |
| • Calculs de la consolidation | Série 4 |
| • Prise en compte d'un massif de stratigraphie variable | Série 5 |
| • Génération de la matrice de souplesse | Série 6 |
| • Solution de Burmister | Série 7 |

Au total, 66 tests ont été réalisés regroupés en 7 séries. Ces tests font l'objet d'un dossier de validation qui peut être communiqué à la demande.

3. Mise en œuvre pratique

3.1. Modélisation

3.1.1. Stratigraphie

3.1.1.1. Définition par couches

Dans un modèle défini par couches, chaque couche est géométriquement caractérisée à l'aide de 3 paramètres :

- Z_{base} cote de la base de la couche définie à l'origine du repère global,
- Pente-x pendage de la base de la couche selon X,
- Pente-y pendage de la base de la couche selon Y.

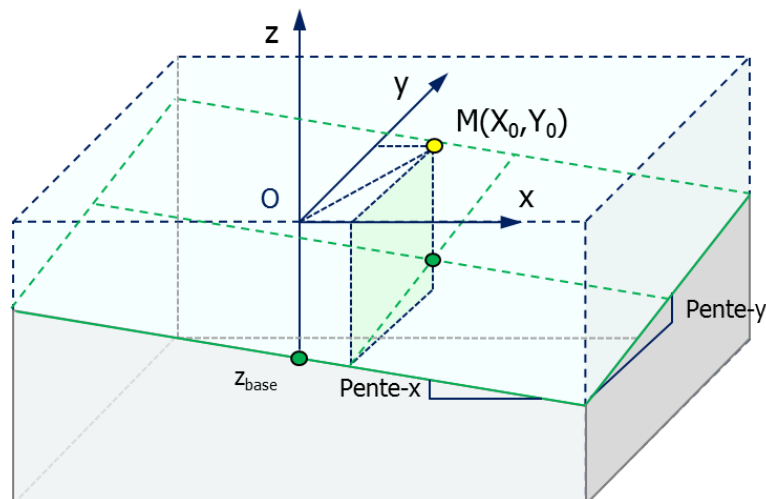


Figure 14 : Traitement du pendage dans un « modèle par couche »

Le programme associe ensuite à chaque point de calcul un profil stratigraphique propre qui sert de base au calcul des contraintes et des déplacements. Le niveau de la base de la couche « i » au droit d'un point de calcul $M(X_0, Y_0)$ est exprimé comme suit :

$$z_M = z_{base} - X_0 \times \text{Pente-x} - Y_0 \times \text{Pente-y}$$

3.1.1.2. Définition par points de sondage

Dans un modèle défini par sondages, le profil de sol ainsi que le niveau de nappe et la contrainte initiale peuvent varier d'un sondage à l'autre. Afin de définir le profil stratigraphique au droit des points de calcul, on peut utiliser l'une des méthodes d'interpolation usuelles en géostatistique :

- Interpolation radiale,
- interpolation surfacique (à partir de la triangulation de Delaunay).

La formulation mathématique des interpolations radiale et surfacique est détaillée en Annexe 2.

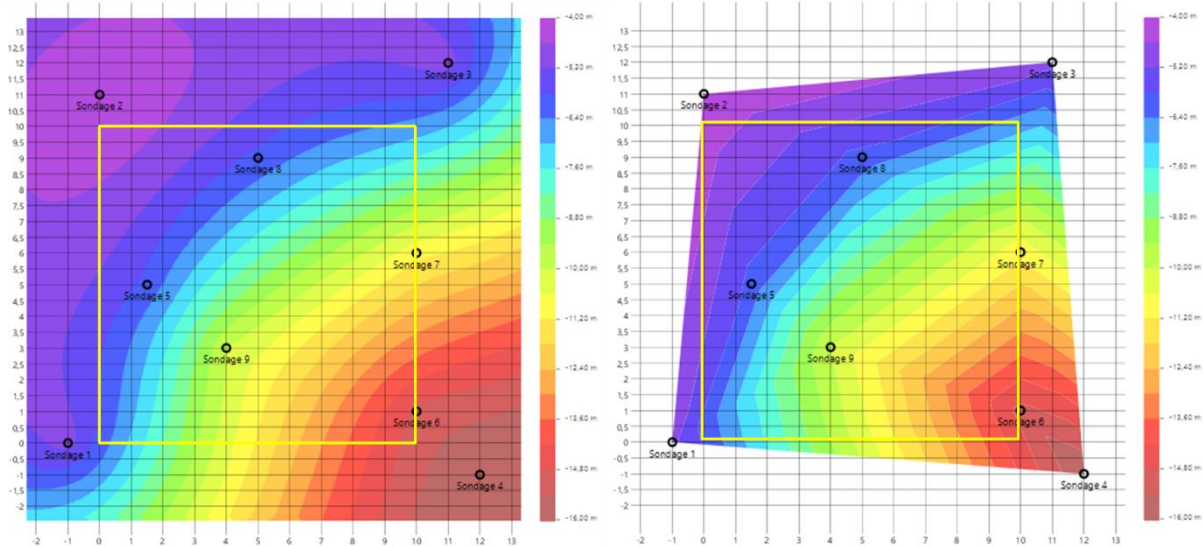


Figure 15 : Résultat de l’interpolation radiale (gauche) et de l’interpolation surfacique (droite)

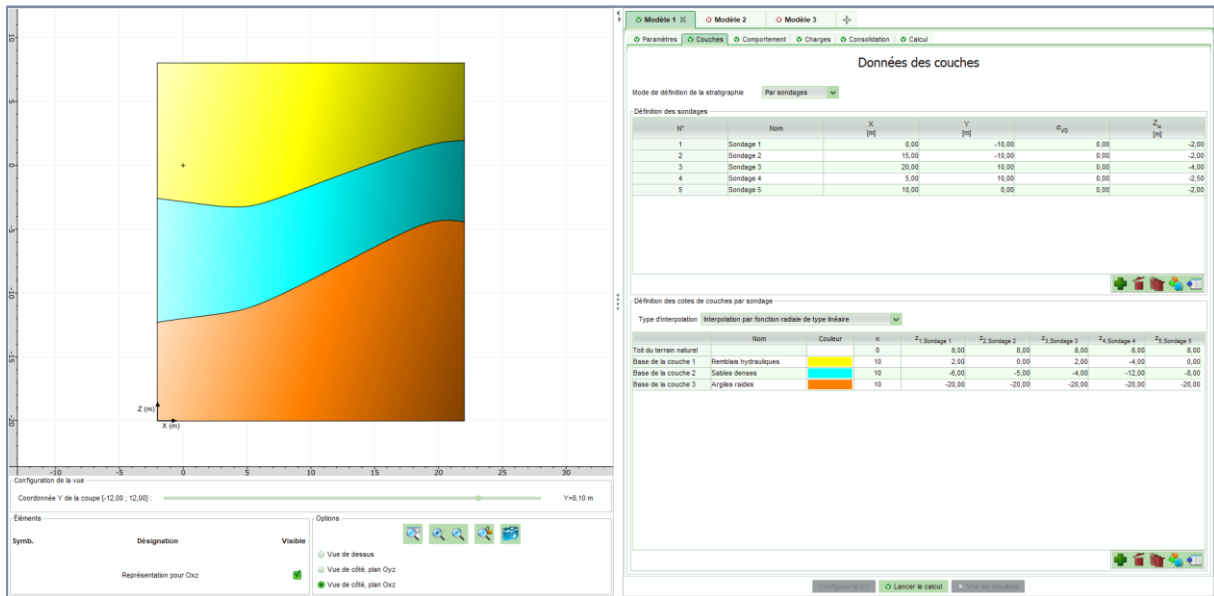


Figure 16 : Exemple de profil stratigraphique généré par TASSELDO+

3.1.1.3. Influence du nombre de subdivisions verticales

TASSELDO+ demande à renseigner pour chaque couche un nombre de subdivisions. Celui-ci a une influence sur la précision :

- du profil des contraintes verticales et horizontales ;
- du calcul du tassement 1D et oedométrique ;
- des calculs en élasticité non-linéaire ;
- des calculs de consolidation.

3.1.2. Loi de comportement du terrain

La mise en œuvre d'un modèle TASSELDO+ nécessite de choisir une loi de comportement reliant les contraintes aux déformations. Dans la pratique, les règles de bonne conception des projets de fondations superficielles permettent de garantir une sécurité de l'ordre de 2 à 3 entre les charges appliquées et les charges limites, ce qui rend légitime l'hypothèse d'un comportement élastique du terrain. Ce comportement élastique peut être décrit par un module de déformation constant (élasticité linéaire) ou variable avec la déformation (élasticité non-linéaire). Pour des niveaux de sécurité plus faibles ou, en présence d'un terrain dit « compressible » (i.e. indice de vide élevé, forte teneur en eau), le choix d'un comportement œdométrique peut être plus approprié (§2.6).

Pour un comportement élastique linéaire, le module de déformation E peut être choisi (a fortiori) dans la pratique par corrélation avec le module pressiométrique E_M . Le rapport E/E_M varie de 1 à 3 pour une déformation verticale ($= \Delta s/\Delta z$) de l'ordre de 1%, et de 3 à 6 pour une déformation de l'ordre de 0,1%. En cas d'utilisation d'essais CPT, le rapport E/q_c peut varier de 1 à 5 pour des déformations de l'ordre de 1% et de 3 à 10 pour des déformations de l'ordre de 0,1%.

Au titre d'une analyse plus fine, le module de déformation peut être ajusté couche par couche en exploitant la notion de courbe de dégradation des modules de déformation. C'est l'esprit des calculs en élasticité non-linéaire (§2.5) implémentés dans TASSELDO+. On peut alors utiliser soit des courbes de dégradation établies à partir du module maximal E_{max} ou G_{max} (cela nécessite d'avoir recours à des essais de précision in situ ou en laboratoire), soit des courbes en S empiriques donnant par exemple le rapport E/E_M en fonction de la déformation verticale, telles que celles établies dans le cadre du Projet National ARSCOP (Hoang et al., 2020) et rappelées dans la Figure 17 (où les courbes de type 1 s'appliquent aux terrains sableux, le type 3 aux terrains argileux et le type 2 aux terrains intermédiaires).

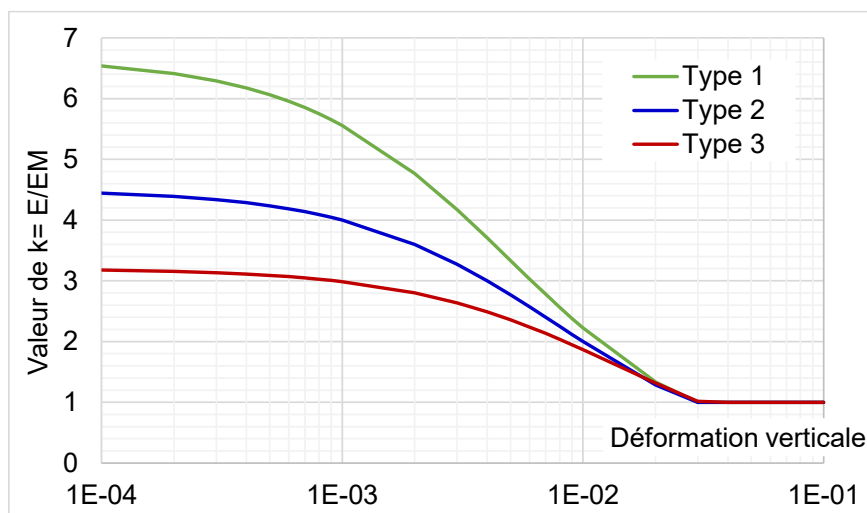


Figure 17 : Rapport E/E_M en fonction de la déformation verticale (PN ARSCOP, 2020)

3.1.3. Consolidation

Le mécanisme de consolidation est simulé dans TASSELDO+ selon les procédures décrites en §2.7. La mise en œuvre du modèle nécessite de choisir certains paramètres, à commencer par les conditions de drainage au sommet et à la base du multicouche. Ces conditions sont à adapter selon la perméabilité du substratum du calcul d'une part et de la présence ou non d'une couche de drainage sous l'ouvrage (Figure 18).

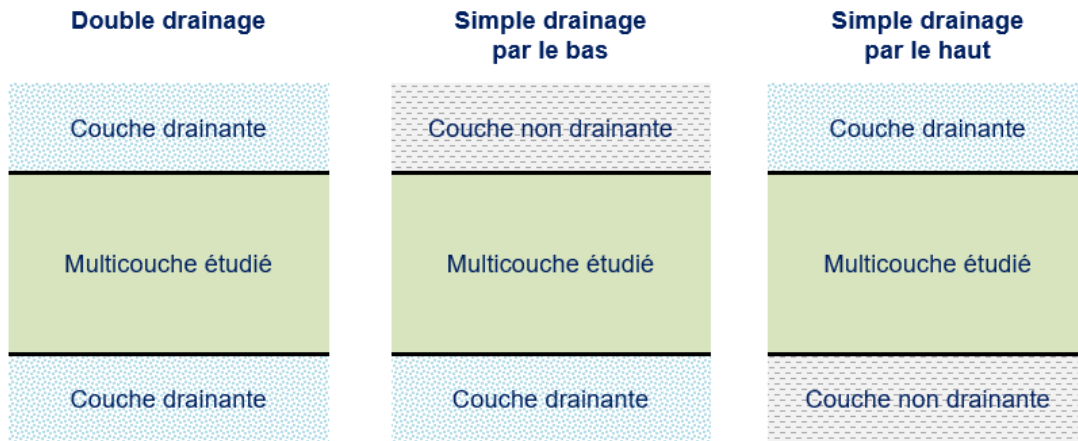


Figure 18 : conditions de drainage au toit et à la base du modèle

La mise en œuvre du modèle nécessite également de définir un pas de temps, que l'on peut prendre égal à 1/100^e du temps final (en première approche). L'utilisateur est également appelé à choisir entre une « consolidation en déplacements » ou une « consolidations en contraintes » correspondant aux approches décrites en §2.7.2. La consolidation en déplacements correspond à la pratique courante (le taux de consolidation est appliqué directement sur le tassement calculé dans chaque souscouche). Enfin, le modèle nécessite de définir pour chaque couche un coefficient de consolidation verticale, qu'il convient de choisir en cohérence avec la gamme de déformation (et le module de déformation associé).

Par ailleurs, TASSELDO+ permet également de simuler l'effet d'un renforcement par drains verticaux destiné à accélérer le processus de consolidation. Pour cela, il convient de définir :

- Le type de maillage (triangulaire / rectangulaire) comme schématisé sur la Figure 19 ;
- Le rapport C_r/C_v entre le coefficient de consolidation radiale et verticale (généralement compris entre 1 et 10) ;
- Le diamètre équivalent (zone d'influence) de la maille D_m peut être estimé en fonction de la disposition des drains (Figure 19).

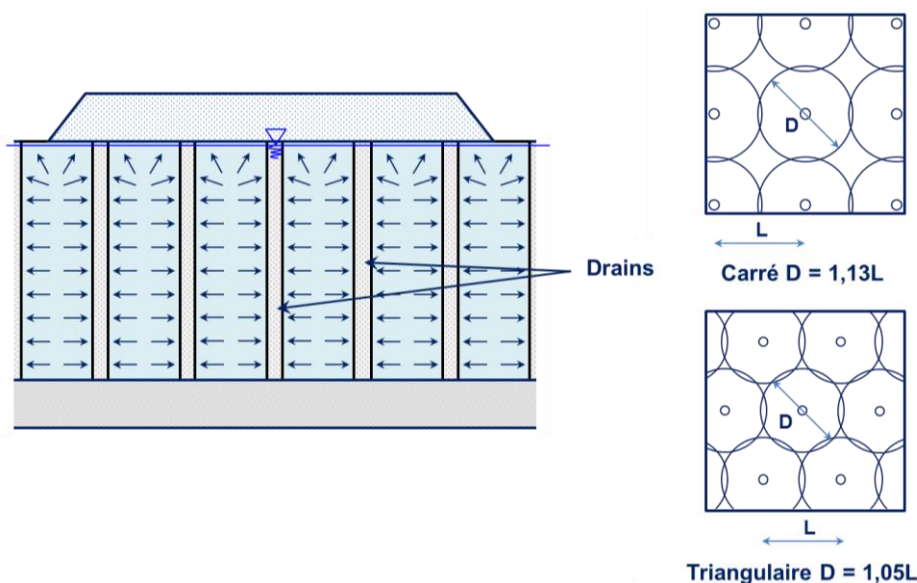


Figure 19 : Diamètre équivalent de la maille

3.1.4. Fluage

Le tassement dû au fluage est calculé selon la relation suivante :

$$\Delta S_{\text{fluage}} = \frac{C_{\alpha}}{1 + e_0} \log \left(\frac{t_0 + \Delta t_f}{t_0} \right)$$

Avec :

- $\frac{C_{\alpha}}{1+e_0}$ coefficient de fluage
- t_0 temps initial (correspondant à l'amorce du fluage)
- Δt_f durée sur laquelle le fluage est comptabilisé. Par défaut, $\Delta t_f = 10$ ans.

Ce tassement est directement ajouté au tassement de consolidation primaire.

3.1.5. Charges

Les charges peuvent être définies individuellement par des zones rectangulaires ou triangulaires. Il existe également des assistants de saisie permettant d'approximer certaines formes particulières de chargement : charges circulaires, talus, charges annulaires, polygonales.

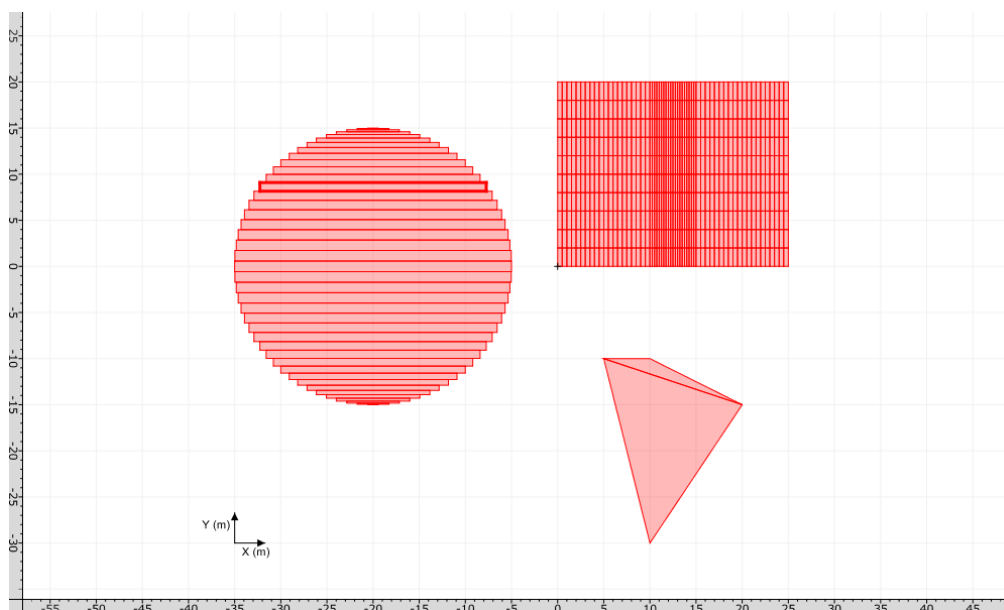


Figure 20 : Génération de différentes formes de chargement à l'aide des assistants (vue en plan)

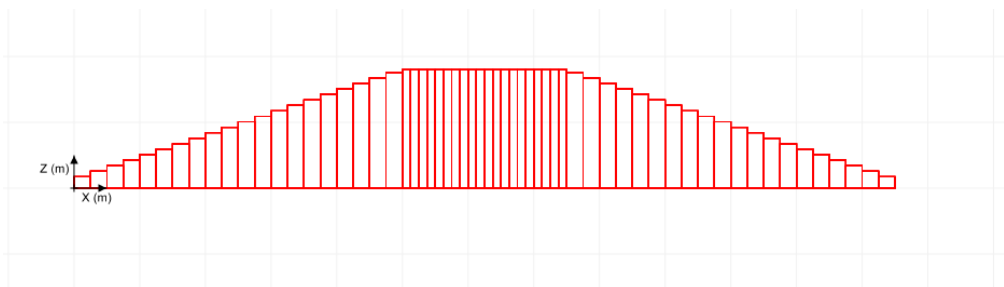


Figure 21 : Modélisation d'un remblaiement à l'aide de l'assistant Talus 3D (vue en coupe)

3.2. Exploitation des résultats

3.2.1. Contraintes

La mise en œuvre du modèle TASSELDO+ donne accès, au droit de chaque point de calcul, aux profils des contraintes verticales et horizontales :

- σ'_{v0} contrainte verticale effective initiale (avant chargement)
- $\Delta\sigma_{zz}$ incrément de contrainte verticale (notée également $\Delta\sigma_v$)
- $\Delta\sigma_{xx}$ incrément de contrainte horizontale selon X
- $\Delta\sigma_{yy}$ incrément de contrainte horizontale selon Y
- $\Delta\sigma_{xy}$ incrément de contrainte de cisaillement

Ces grandeurs peuvent également représentées sous forme d'isovaleurs, en plan ou en profondeur (Figure 22).

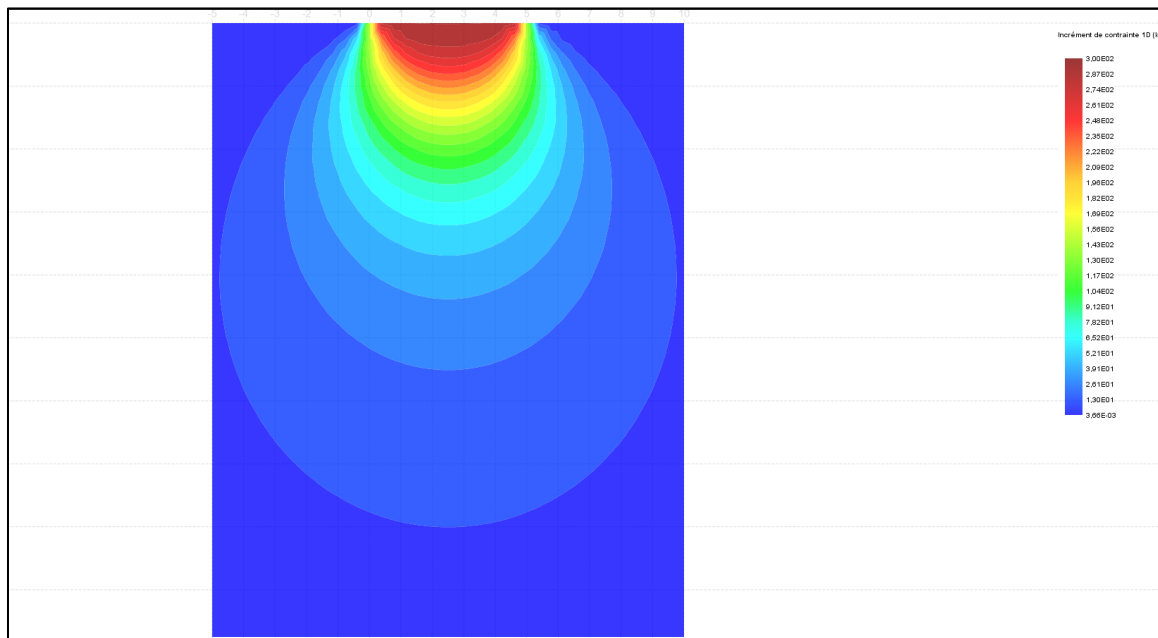


Figure 22 : Bulbe de contraintes verticales induit par un chargement circulaire

TASSELDO+ donne également accès à l'incrément de contrainte « équivalente » $\Delta\sigma_{eq}$. Celle-ci est calculée comme suit :

$$\Delta\sigma_{eq} = \Delta\sigma_{zz} - \nu\Delta\sigma_{xx} - \nu\Delta\sigma_{yy} = E \cdot \varepsilon_{zz}$$

Où

- E Module de Young du terrain rencontré au point considéré
- ν Coefficient de Poisson du terrain rencontré au point considéré
- ε_{zz} taux de déformation verticale (notée également ε_v)

3.2.2. Déplacements

La mise en œuvre du modèle TASSELDO+ donne accès, au droit de chaque point de calcul, aux profils des tassements et déplacements horizontaux :

- s tassement
- u_x déplacement horizontal selon X
- u_y déplacement horizontal selon Y

Ces grandeurs peuvent également représentées sous forme d'isovaleurs, en plan ou en profondeur (Figure 23).

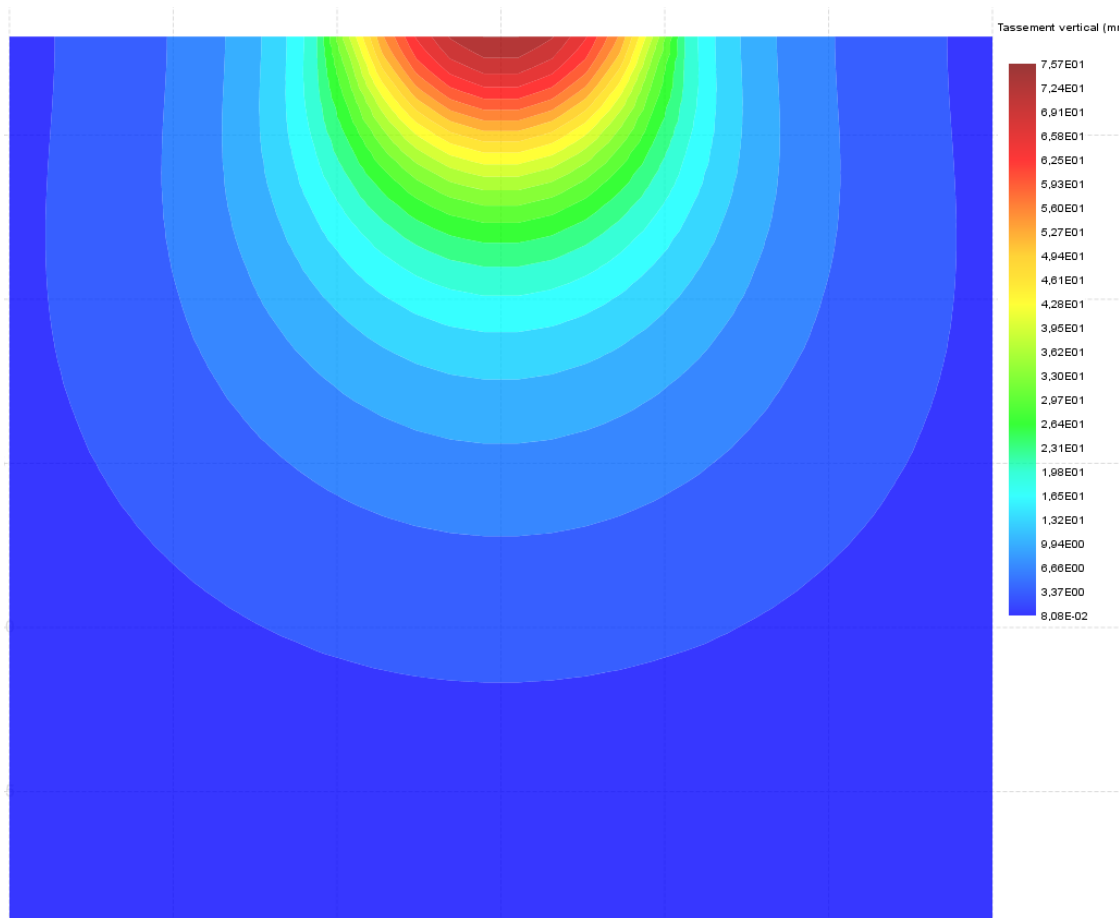


Figure 23 : variation du tassement en profondeur sous l'effet d'une charge rectangulaire

3.2.3. Modules de déformation

En cas de calcul en élasticité non-linéaire, le module TASSELDO+ procède à un ajustement, au droit de chaque point de calcul, des modules de déformation en fonction de la déformation.

Le résultat de cet ajustement peut être exploité sous deux formats :

- Cartographie des modules de déformation avec la profondeur ou en plan (Figure 24) ;
- Profils des déformations verticales retenues pour le calage des modules au droit de chaque de point de calcul (Figure 25).

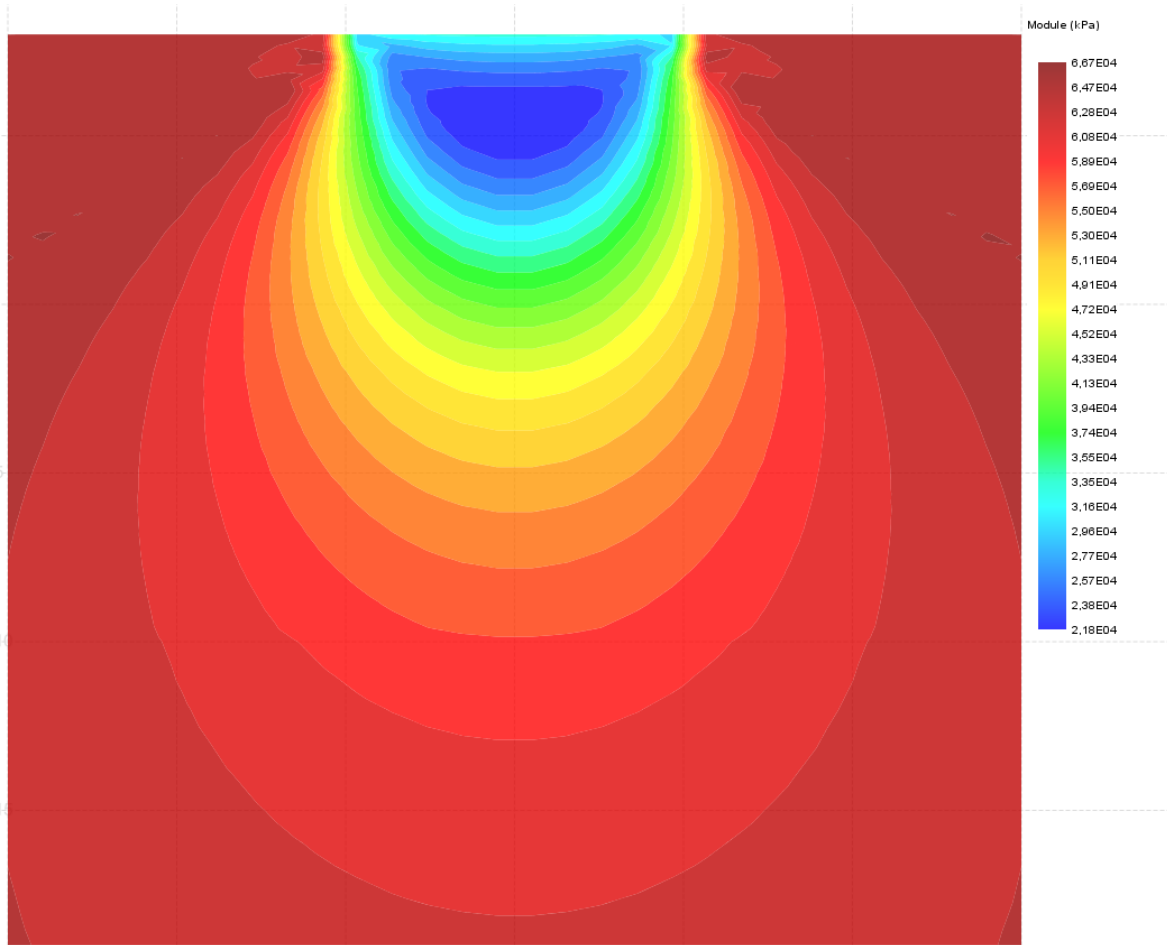


Figure 24 : Cartographie des modules de déformation avec la profondeur

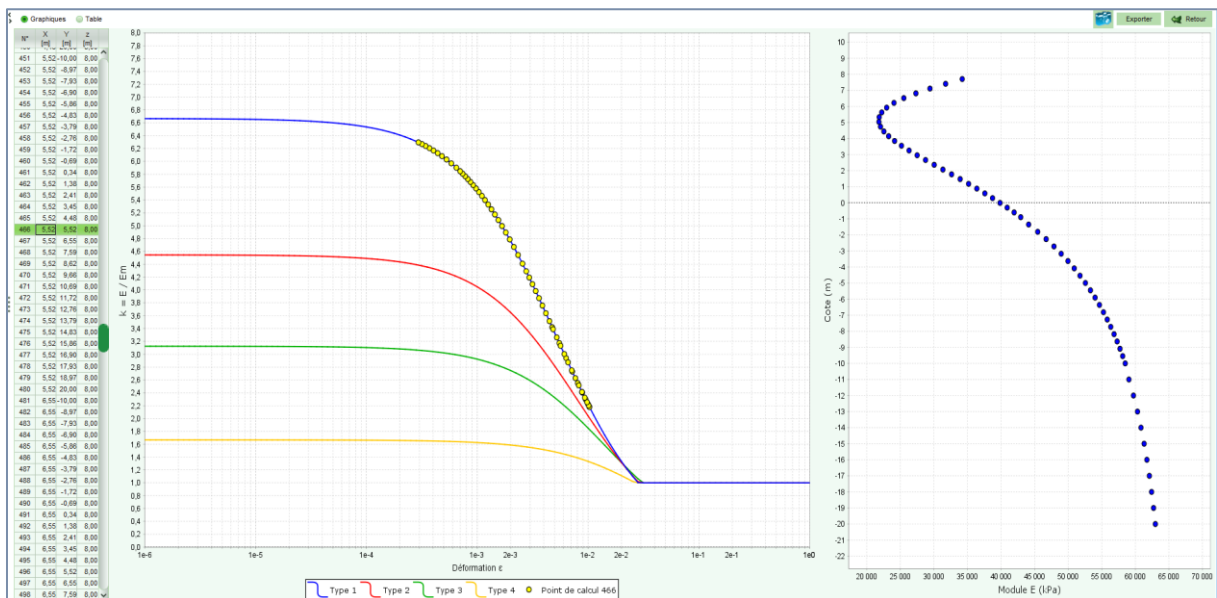


Figure 25 : Profil des déformations retenues pour le calage des modules de déformation

3.2.4. Consolidation

La mise en œuvre du modèle TASSELDO+ donne accès, au droit de chaque point de calcul, et à un instant donné t , à la variation du degré de consolidation $X_{eq}(z,t)$ avec la profondeur (Figure 26). On rappelle que X_{eq} intègre la contribution éventuelle d'un renforcement par drains verticaux.

Le modèle donne également accès à la variation du tassement de chaque couche avec le temps (au droit de chaque point de calcul, Figure 27).

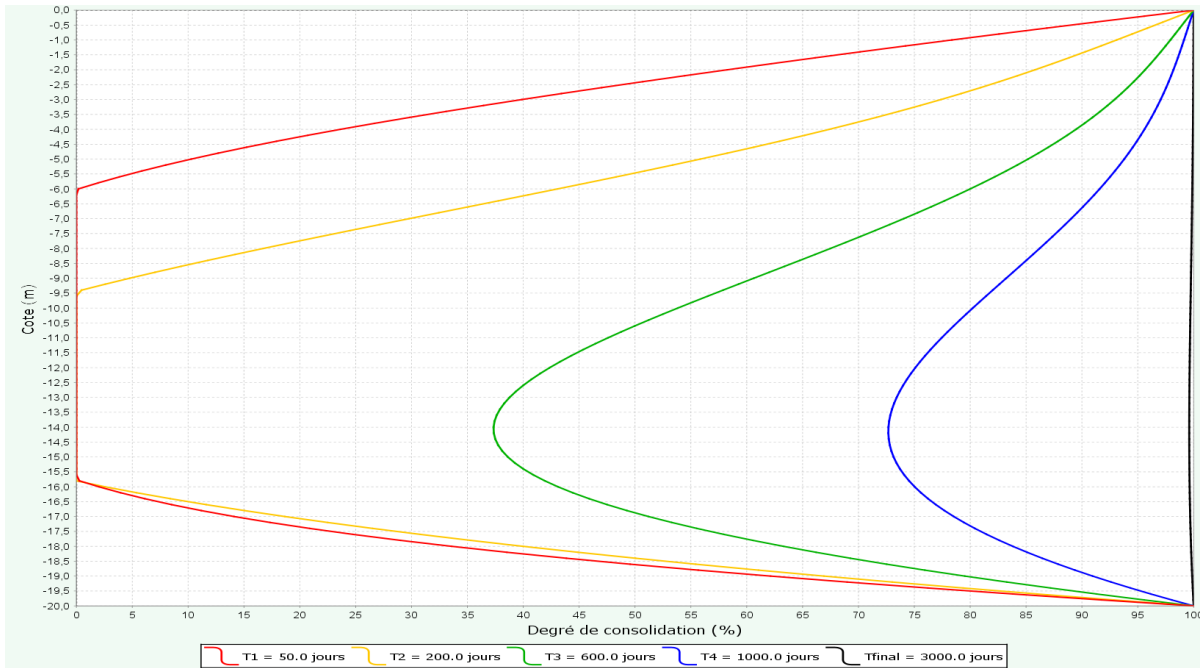


Figure 26 : Variation du degré de consolidation (équivalent) avec la profondeur

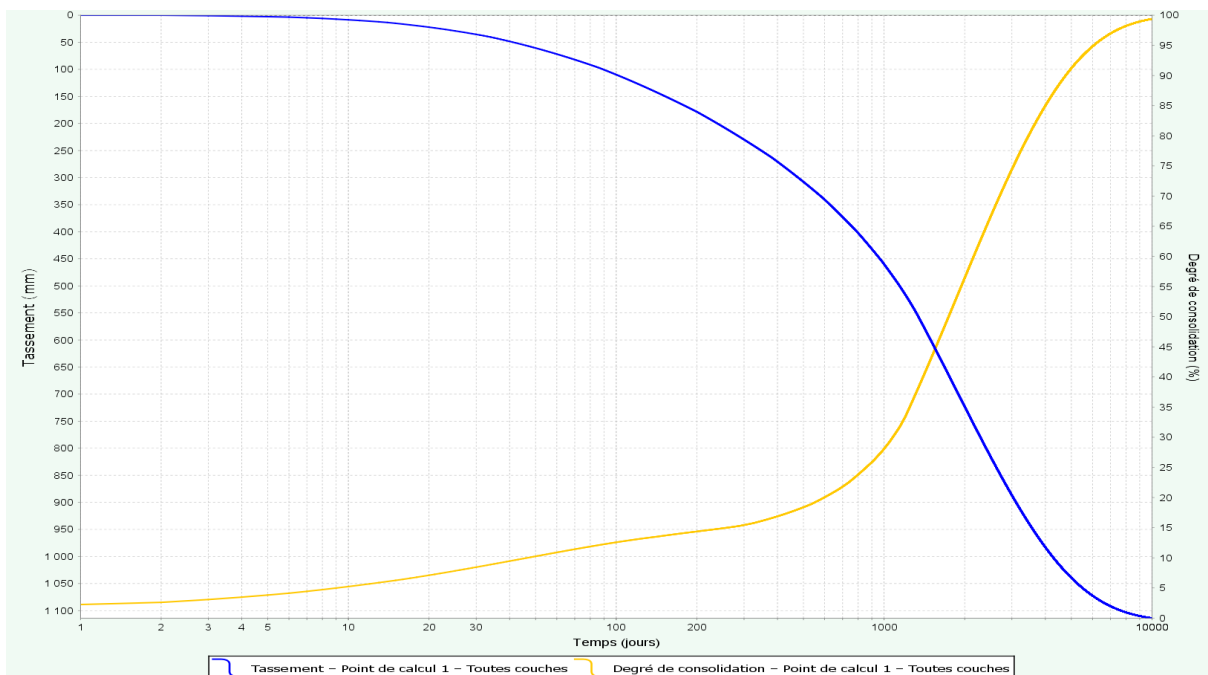


Figure 27 : Variation du tassement avec le temps

3.3. Passerelle avec d'autres modules

3.3.1. Passerelle avec TASPLAQ

Il existe deux passerelles entre les modules TASSELDO et TASPLAQ. La première, de TASPLAQ vers TASSELDO, permet d'exporter la distribution de la réaction du sol calculée sous TASPLAQ vers un modèle TASSELDO, ce qui donne accès aux incréments de contrainte et de déplacements en profondeur.

La seconde passerelle, de TASSELDO vers TASPLAQ, permet d'utiliser TASSELDO pour générer la matrice de souplesse du sol (voir §3.4.1 de la notice technique de TASPLAQ) dans les situations où le terrain présente une stratigraphie complexe ou un comportement incompatible avec les solutions de Boussinesq utilisées par défaut dans TASPLAQ.

3.3.2. Passerelle avec TASPIE+

Le profil de tassement calculé par TASSELDO+ au droit d'un point donné, ainsi que celui de la contrainte verticale effective $\sigma'_{v0} + \Delta\sigma_v$, peut être importé directement dans un modèle TASPIE+ en vue d'analyser des mécanismes de frottement négatif (voir §3.5.3 de la notice technique de TASPIE+).

3.3.3. Passerelle avec PIECOEF+

Le profil des déplacements horizontaux calculés par TASSELDO+ au droit d'un point donné, peut être importé directement dans un modèle PIECOEF+ en vue d'analyser des mécanismes de poussée latérale du sol (voir §3.4 de la notice technique de PIECOEF+).

4. Bibliographie

Briançon L., Liausu P., Plumelle C., Simon B., (2018). Amélioration et renforcement des sols – Tomes 1 et 2, Le Moniteur, 1ère édition.

Burland J.B., Broms B.B., De Mello V.F.B. (1977) – Behaviour of Foundations and Structures. Proceedings of the ninth international conference on soil mechanics and foundation engineering. Tokyo, Vol. 2, p. 495 – 546.

Combarieu O. (2006) – L’usage des modules de déformation en géotechnique. Revue française de géotechnique, N° 114.

Courbon J., Theillout JN, Résistance des matériaux – Formulaire C2060 – Techniques de l’ingénieur, Traité de Construction.

Frank R., Cuira F., et Burlon S. (2018). Calcul des fondations superficielles et profondes, Presses de Ponts.

Hoang, M. T., Abboud, A., & Cuira, F. (2020). Utilisation d’une approche en déplacement pour l’évaluation des effets parasites s’exerçant sur un pieu à proximité d’un remblai. JNGG.

Hoang MT., Cuira F., Burlon B. (2020). Vers une approche de calcul unifiée du tassement des semelles et des radiers, 10ème JNGG, Lyon.

Hoang, M. T., Cuira, F., Daniel, D., & Pierre, M. (2018). Estimation du rapport E/EM : application aux radiers de grandes dimensions. Journées Nationales de Géotechnique et de Géologie de l’Ingénieur (JNGG). Champs-sur-Marne.

Hoang, M. T., Cuira, F., Daniel, D., & Pierre, M. (2018). Estimation du rapport E/EM : application aux radiers de grandes dimensions.

Hoang, M. T., El Khotri, N., Cuira, F., & Burlon, S. (2020). Settlement of shallow foundations using pressuremeter tests. ISC6.

I.M. Smith, D. G. (2014). Programming the finite element method 5th edition. New York: John Wiley & Sons.

Leidwanger, C. (1993). Etude des tassements différés à partir de résultats d’essais au Diflupress Longue Durée.

Poulos H.G and Davis E.H. (1974). Elastic solutions for soil and rock mechanics. John Wiley & Sons, 411 p.

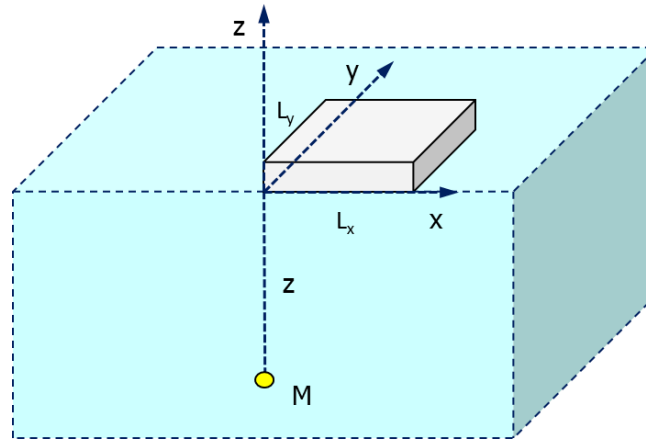
Roux, N., & Buet, P. (2009). Retour d’expérience des tassements mesuré sur le CNPE de Gravelines.

Seifeddine, I. (1993). Étude du tassement d’une centrale nucléaire sur argile surconsolidée : modélisation avec lois hyperboliques. Châtenay-Malabry, Ecole Centrale de Paris.

Terzaghi K. (1943). Theoretical soil mechanics, Theory of Semi-infinite elastic solids (2nd edition).

Annexe 1 – Fonctions de « forme » pour les charges rectangulaires et triangulaires

- **Fonctions I et F pour des charges rectangulaires**



Pour rappel, on écrit :

$$R_x = \sqrt{L_x^2 + z^2} \quad R_y = \sqrt{L_y^2 + z^2} \quad R_{xy} = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + z^2}$$

Les fonctions de forme pour calculer les incréments de contrainte sous le coin d'une charge rectangulaire uniforme de dimension $L_x \times L_y$ sont présentées ci-dessous :

$$I_{1,z} = \text{atan} \left(\frac{L_x L_y}{z R_{xy}} \right)$$

$$I_{2,z} = \frac{L_x L_y (R_x^2 + R_y^2)}{R_x^2 R_y^2 R_{xy}}$$

$$I_{1,x} = \text{atan} \left(\frac{L_x L_y}{z R_{xy}} \right) - \left(\frac{z L_x L_y}{R_x^2 R_{xy}} \right)$$

$$I_{2,x} = \text{atan} \left(\frac{L_x z}{L_y R_{xy}} \right) + \text{atan} \left(\frac{L_x}{L_y} \right)$$

$I_{1,y}$: Il convient d'inverser L_x et L_y dans la formule de $I_{1,x}$

$I_{2,y}$: Il convient d'inverser L_x et L_y dans la formule de $I_{2,x}$

$$I_{1,xy} = -1 - \frac{z}{R_y} - \frac{z}{R_x} + \frac{z}{R_{xy}}$$

$$I_{2,xy} = \ln \left(\frac{(R_x - z)(R_y - z)}{(-2z)(R_{xy} - z)} \right)$$

Les fonctions de forme pour calculer les déplacements sous le coin d'une charge rectangulaire uniforme de dimension $L_x \times L_y$ sont présentées ci-dessous :

$$F_{1,z} = \frac{L_y}{z} \ln \left(\frac{(1 + \sqrt{\lambda^2 + 1}) \sqrt{\lambda^2 + \beta^2}}{\lambda(1 + \sqrt{1 + \lambda^2 + \beta^2})} \right) + \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}) \sqrt{1 + \beta^2}}{\lambda + \sqrt{1 + \lambda^2 + \beta^2}} \right) \text{ avec } \lambda = \frac{L_y}{L_x} \text{ et } \beta = \frac{z}{L_x}$$

$$F_{2,z} = z \operatorname{atan} \left(\frac{\lambda}{\beta \sqrt{1 + \lambda^2 + \beta^2}} \right) \text{ avec } \lambda = \frac{L_y}{L_x} \text{ et } \beta = \frac{z}{L_x}$$

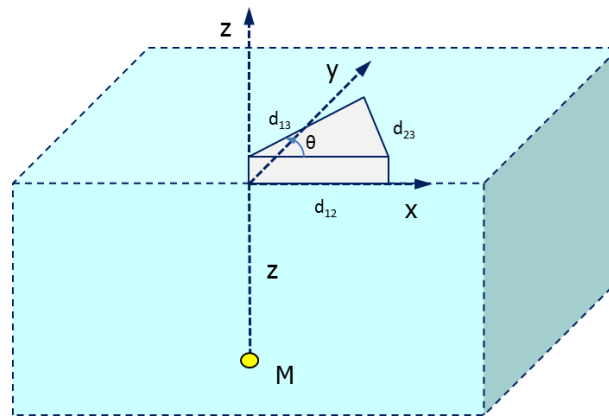
$$F_{1,x} = \ln \left(\frac{R_x(R_y + L_y)}{-z(R_{xy} + L_y)} \right)$$

$$F_{2,x} = L_y \ln \left(\frac{R_{xy} - z}{R_y - z} \right) + L_x \operatorname{atan} \left(\frac{L_y L_x (R_{xy} + z)}{L_x^2 R_{xy} - L_y^2 z} \right)$$

$F_{1,y}$: Il convient d'inverser L_x et L_y dans la formule de $F_{1,x}$

$F_{2,y}$: Il convient d'inverser L_x et L_y dans la formule de $F_{2,x}$

• Fonctions G et T pour des charges triangulaires



Pour rappel, on écrit :

$$R_2 = \sqrt{d_{12}^2 + z^2} : \text{ la distance entre M et une extrémité du triangle,}$$

$$R_3 = \sqrt{d_{13}^2 + z^2} : \text{ la distance entre M et l'autre extrémité du triangle.}$$

Les fonctions de forme pour calculer les incréments de contrainte sous le coin d'une charge triangulaire uniforme de dimension $d_{12} \times d_{13} \times d_{23}$ sont présentées ci-dessous :

$$G_{1,z} = \begin{cases} \operatorname{atan} \left(\frac{z(d_{13} \cos \theta - d_{12})}{d_{13} R_2 \sin \theta} \right) + \operatorname{atan} \left(\frac{z(d_{12} \cos \theta - d_{13})}{d_{12} R_3 \sin \theta} \right) - \theta \text{ si } \theta \neq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \text{ si } \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$G_{2,z} = \frac{d_{12} d_{13} \sin \theta}{(d_{12}^2 d_{13}^2 \sin^2 \theta + d_{23}^2 z^2)} \left(\frac{d_{12}(d_{12} - d_{13} \cos \theta)}{R_2} + \frac{d_{13}(d_{13} - d_{12} \cos \theta)}{R_3} \right)$$

$$G_{1,x} = \frac{z d_{13} \sin \theta}{(d_{12}^2 d_{13}^2 \sin^2 \theta + z^2 d_{23}^2)} \left((d_{13} \cos \theta - d_{12}) z^2 \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right) - \frac{d_{12} d_{13}^2 \sin^2 \theta}{R_3} \right) - \cos \theta \sin \theta \left(1 + \frac{z}{R_3} \right) + 2\nu \left(\operatorname{atan} \left(\frac{d_{12} d_{13}^2 \sin^2 \theta - z^2 (d_{13} \cos \theta - d_{12})}{z d_{13} \sin \theta R_3} \right) + \operatorname{atan} \left(\frac{z(d_{13} \cos \theta - d_{12})}{d_{13} \sin \theta R_2} \right) + \operatorname{atan} \left(\frac{z \cos \theta}{R_3 \sin \theta} \right) + \frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$G_{2,x} = -\frac{d_{13} \sin \theta (d_{13} \cos \theta - d_{12})}{d_{23}^2} \ln \left(\frac{R_3 - z}{R_2 - z} \right) + \cos \theta \sin \theta \ln \left(\frac{R_3 - z}{-2z} \right) - \frac{d_{13}^2 \sin^2 \theta}{d_{23}^2} T_{3\text{int},sx}(z, d_{12}, d_{13}, \theta)$$

$G_{1,y}$: Il convient d'inverser d_{12} et d_{13} dans la formule de $G_{1,x}$

$G_{2,y}$: Il convient d'inverser d_{12} et d_{13} dans la formule de $G_{2,x}$

$$G_{1,xy} = d_{13}^2 \sin^2 \theta z \left(\frac{d_{12} d_{13} \cos \theta + z^2 - R_2 R_3}{(d_{12}^2 d_{13}^2 \sin^2 \theta + z^2 d_{23}^2) R_3} - \frac{1}{d_{13}^2} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{z} \right) \right)$$

$$G_{2,xy} = -\frac{d_{13}^2 \sin^2 \theta}{d_{23}^2} \ln \left(\frac{R_3 - z}{R_2 - z} \right) + \sin^2 \theta \ln \left(\frac{R_3 - z}{-2z} \right) + \frac{d_{13} \sin \theta (d_{13} \cos \theta - d_{12})}{d_{23}^2} \left(\text{atan} \left(\frac{d_{12} d_{13}^2 \sin \theta (d_{13} - d_{12} \cos \theta)}{d_{12}^2 d_{13}^2 \sin^2 \theta + d_{23}^2 z^2 - d_{23}^2 R_3 z} \right) + \text{atan} \left(\frac{d_{13} d_{12}^2 \sin \theta (d_{12} - d_{13} \cos \theta)}{d_{12}^2 d_{13}^2 \sin^2 \theta + d_{23}^2 z^2 - d_{23}^2 R_2 z} \right) \right)$$

Les fonctions de forme pour calculer les déplacements sous le coin d'une charge triangulaire uniforme de dimension $d_{12} \times d_{13} \times d_{23}$ sont présentées ci-dessous :

$$T_{1,z} = \frac{d_{13} d_{12} \sin \theta}{d_{23}} \ln \left(\frac{(d_{23} R_3 + d_{13} (d_{13} - d_{12} \cos \theta))(d_{23} R_2 + d_{12} (d_{12} - d_{13} \cos \theta))}{d_{23}^2 z^2 + d_{12}^2 d_{13}^2 \sin^2 \theta} \right)$$

$$T_{2,z} = -z \left(\text{atan} \left(\frac{z(d_{13} \cos \theta - d_{12})}{d_{13} R_2 \sin \theta} \right) + \text{atan} \left(\frac{z(d_{12} \cos \theta - d_{13})}{d_{12} R_3 \sin \theta} \right) - \theta \right)$$

$$T_{1,x} = \left(\begin{array}{c} \sin \theta \ln \left(\frac{R_3 + d_{13}}{-z} \right) \\ + \frac{d_{13} \sin \theta}{d_{23}} \ln \left(\frac{(d_{23} R_2 + d_{12} (d_{13} \cos \theta - d_{12}))(d_{23} R_3 + d_{13} (d_{12} \cos \theta - d_{13}))}{d_{23}^2 z^2 + d_{13}^2 d_{12}^2 \sin^2 \theta} \right) \end{array} \right)$$

$$T_{2,x} = \frac{d_{12} d_{13}^2 \sin^2 \theta}{d_{23}^2} \left(\begin{array}{c} +2\theta \\ - \text{atan} \left(\frac{z d_{23}^2 (R_3 + z) + d_{12}^2 d_{13}^2 \sin^2 \theta}{d_{12} d_{13}^2 \sin \theta (d_{12} \cos \theta - d_{13})} \right) \\ - \text{atan} \left(\frac{z d_{23}^2 (R_2 + z) + d_{12}^2 d_{13}^2 \sin^2 \theta}{d_{13} d_{12}^2 \sin \theta (d_{13} \cos \theta - d_{12})} \right) \\ - \pi \text{ si } \cos \theta < \min \left(\frac{d_{12}}{d_{13}}; \frac{d_{13}}{d_{12}} \right) \text{ ou } 0 \text{ sinon} \\ + \frac{d_{12} d_{13} (d_{13} \cos \theta - d_{12}) \sin \theta}{d_{23}^2} \ln \left(\frac{d_{13}^2 (R_2 + z)}{d_{12}^2 (R_3 + z)} \right) \end{array} \right)$$

$T_{1,y}$: Il convient d'inverser d_{12} et d_{13} dans la formule de $T_{1,x}$

$T_{2,y}$: Il convient d'inverser d_{12} et d_{13} dans la formule de $T_{2,x}$

Annexe 2 – Procédures d’interpolation pour une stratigraphie par points de sondages

- **Interpolation radiale**

La base d’une couche est définie par un réseau de n sondages dont le niveau varie respectivement de z_1 à z_n . On cherche à connaître la base de cette couche en un point quelconque M. Celle-ci est obtenue comme une combinaison linéaire des z_i selon le formalisme vectoriel suivant :

$$z_M = (w_{1M} \quad w_{2M} \quad \dots \quad w_{nM}) \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Où w_{iM} est un poids inversement proportionnel à la distance entre le sondage « i » et le point M. Les valeurs de w_{iM} s’expriment vectoriellement à l’aide d’une matrice de distances $[K_{ij}]$ selon le formalisme suivant :

$$(w_{1M} \quad w_{2M} \quad \dots \quad w_{nM}) = (d_{1M} \quad d_{2M} \quad \dots \quad d_{nM}) \cdot \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{pmatrix}^{-1}$$

avec K_{ij} est la distance entre le sondage « i » et le sondage « j ».

- **Interpolation surfacique**

La triangulation consiste à diviser le champ en triangles disjoints dont les sommets sont les sondages disponibles. La méthode de la triangulation de Delaunay permet de définir un triangle unique contenant le point M.

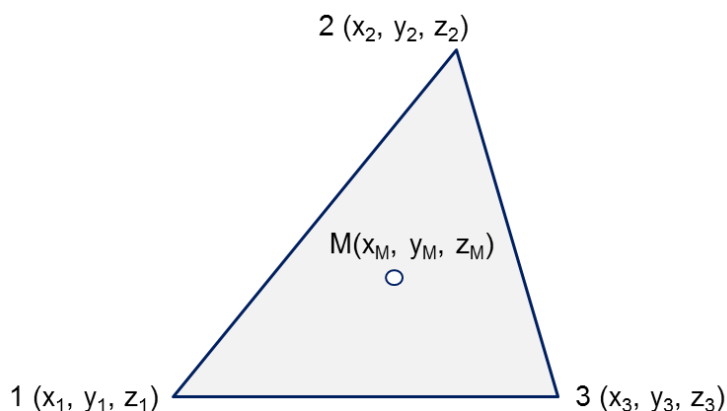


Figure 28 : Définition du triangle de Delaunay contenant le point M

On applique ensuite la méthode d’interpolation linéaire afin de définir la valeur de z_M .

$$z_M = (x_M \quad y_M \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$